

VŠB – Technická univerzita Ostrava

Fakulta stavební

Katedra stavební mechaniky

Modelování oblouků metodou konečných prvků

Finite element modelling of arcs

Student:

David Míša

Vedoucí bakalářské práce:

doc. Ing. Jiří Brožovský, Ph.D.

**Obsah**

1. Úvod .....	1
2. Metoda konečných prvků .....	1
2.1. Klasické metody řešení .....	1
2.1.1. Variační metody .....	2
2.1.2. Metoda sítí .....	4
2.2. Definice metody konečných prvků .....	7
2.3. Vývoj metody konečných prvků .....	8
2.4. Nelineární úlohy MKP .....	9
3. Odvození konečného prvku .....	13
3.1. Základní vztahy teorie pružnosti .....	13
3.2. Odvození příhradového prutu Ritzovou metodou .....	16
3.3. Rovinná úloha .....	19
3.3.1. Trojúhelníkový stěnový prvek .....	19
3.3.2. Čtyřúhelníkový stěnový prvek .....	22
3.3.3. Izoparametrický prvek .....	23
4. Softwary využívající metodu konečných prvků .....	23
4.1. Řešené úlohy .....	23
4.2. Dříve používané softwary .....	25
4.3. NEXIS, Scia Engineer .....	26
4.4. ANSYS .....	29
5. Vytvořený program na řešení oblouků .....	31
5.1. Uživatelské prostředí programu .....	31
5.2. Geometrie oblouků .....	33
5.2.1. Kruhové oblouky .....	33
5.2.2. Parabolické oblouky .....	35
5.3. Aplikace metody konečných prvků ve vytvořeném programu .....	36
5.3.1. Generátory uzlů sítě konečných prvků .....	37
5.3.2. Kódová čísla .....	37
5.3.3. Matice tuhosti, okrajové podmínky .....	38
5.3.4. Zatížení .....	38
5.3.5. Podmínka plasticity, Newton-Raphsonova metoda .....	39
5.4. Ovládání programu .....	40
6. Srovnání výsledků .....	41
6.1. Verifikace výsledků softwaru s programy uFEM a Scia Engineer .....	41
6.2. Přesnost výsledků a změna hustoty sítě konečných prvků .....	43
6.3. Porovnání kruhového a parabolického oblouku .....	46
7. Závěr .....	48

**Seznam obrázků**

2.1 Přetvárná práce vnějších sil .....	2
2.2 Deformační energie .....	3
2.3 Vytvoření sítě .....	4
2.4 Diferenční schéma .....	5
2.5 L'Hermitova analogie .....	5
2.6 Eulerova metoda .....	11
2.7 Newton-Raphsonova metoda .....	12
2.8 N-R a modifikovaná N-R metoda .....	12
3.1 Obecně zatížená stěna .....	13
3.2 Deformace elementu tělesa .....	14
3.3 Vyříznutý příhradový prut .....	16
3.4 Příhradový prut - aproximační funkce .....	17
3.5 Trojúhelníkový konečný prvek .....	19
3.6 Čtyřúhelníkový konečný prvek .....	22
3.7 Izoparametrický konečný prvek .....	23
4.1 Příčná vazba ocelové haly .....	24
4.2 Prostředí programu Scia Engineer .....	26
4.3 Obalové křivky vnitřních sil .....	27
4.4 Obalové křivky ohybového momentu na vybraných prutech .....	28
4.5 Vymodelovaný přístřešek .....	29
4.6 Prostředí programu ANSYS .....	30
5.1 Uživatelské prostředí vytvořeného programu .....	31
5.2 Algoritmus elementární části uživatelského menu .....	32
5.3 Geometrie kruhových oblouků .....	33
5.4 Geometrie parabolických ( $2^\circ$ ) oblouků .....	35
5.5 Síť konečných prvků kruhového oblouku .....	37
5.6 Podmínky plasticity .....	39
6.1 Hlavní napětí $\sigma_I$ na ověřovacím příkladu .....	42
6.2 Hlavní napětí $\sigma_I$ z programu uFEM .....	42
6.3 Hlavní napětí $\sigma_I$ z programu Scia Engineer .....	43
6.4 Napětí $\sigma$ na prutovém modelu oblouku (Scia Engineer) .....	44
6.5 Hlavní napětí $\sigma_I$ při 3 prvcích na výšku průřezu .....	45
6.6 Hlavní napětí $\sigma_I$ při 4 prvcích na výšku průřezu .....	45
6.7 Hlavní napětí $\sigma_I$ při 5 prvcích na výšku průřezu .....	46
6.8 Porovnání oblouků – kruhový oblouk – $\sigma_{vm}$ .....	47
6.9 Porovnání oblouků – parabolický oblouk – $\sigma_{vm}$ .....	48

**Seznam tabulek**

6.1 Přehled napětí při různé hustotě sítě konečných prvků .....	46
---	----

**Seznam použitého značení veličin**

$F$ .....	síla
$w$ .....	posun ve směru působící síly
$L_e, L_e^*$ .....	přetvárná práce vnějších sil, komplementární (doplňková) přetvárná práce vnějších sil
$\sigma, \tau$ .....	normálové a smykové napětí
$\varepsilon$ .....	poměrná deformace, vektor poměrných deformací konečného prvku
$W, W^*$ .....	deformační energie, komplementární (doplňková) deformační energie
$\Pi_i, \Pi_e$ .....	potenciální energie vnitřních sil, potenciální energie vnějších sil
$\varphi$ .....	Airyho funkce
$M, N$ .....	ohybový moment, normálová síla
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ .....	složky napětí: normálové ve směru os $x$ a $y$ , smykové v rovině $xy$
$D$ .....	desková tuhost,
$m_x, m_y, m_{xy}$ .....	složky měrných vnitřních sil na desce, ohybové momenty
$q_x, q_y$ .....	složky měrných vnitřních sil na desce, posouvající síly
$\Pi$ .....	potenciální energie konstrukce
$[K], [K(\dot{r})]$ ..	matice tuhosti konstrukce, matice tuhosti konstrukce v zatěžovacím kroku
$K_e$ .....	matice tuhosti konečného prvku
$\{r\}, \{\dot{r}\}$ .....	vektor deformací, vektor deformací v zatěžovacím kroku
$\{F\}, \{\dot{F}\}$ .....	zatěžovací vektor, zatěžovací vektor pro zatěžovací krok nelineárního výpočtu
$\sigma_e$ .....	napětí v zatěžovacím kroku
$[K']$ .....	matice tuhosti konstrukce s upravenými tuhostmi prvků
$\{G\}$ .....	vektor nevyvážených sil
$u, v$ .....	posuny ve směru souřadných os $x, y$
$E$ .....	Youngův modul pružnosti v tlaku a tahu
$\mu$ .....	Poissonův součinitel příčné deformace

$[D]$	matice obsahující geometrické rovnice
$\Psi(x)$	aproximační funkce posunutí
$A$	obsah plochy průřezu prutu
$a_1, a_2, \dots, a_n$	aproximační konstanty
$a$	vektor aproximačních konstant, parametr střednice parabolického oblouku
$r$	vektor uzlových posunutí, poloměr kruhového oblouku
$\sigma$	vektor složek napětí na konečném prvku
$\sigma_1, \sigma_2$	složky hlavních napětí
$\sigma_I$	von-Misesovo napětí
$b$	rozpětí oblouku
$\Delta h$	rozdíl výšky konců oblouku
$\Delta H$	vzepětí oblouku od vyššího konce
$V$	vzepětí oblouku od nižšího konce
$c$	vzdálenost středu kruhového oblouku od úsečky spojující konce oblouku
$\Delta h_2$	rozdíl výšky vyššího konce a středu oblouku
$X_1, X_2$	vzdálenosti konců parabolického oblouku od osy paraboly na $x$ -ové ose

## **Anotace**

Cílem této práce je vytvoření softwaru na výpočet deformací a napětí na obloucích. Program bude používat stěnové trojúhelníkové konečné prvky. Konstrukci tvoří buď kruhový, nebo parabolický ( $2^\circ$ ) oblouk s tím, že geometrie oblouků je zadatelná průřezem, rozpětím, vzepětím, poloměrem (popř. parametrem paraboly) a počtem konečných prvků na výšku průřezu oblouku.

V práci studujeme problematiku a vývoj metody konečných prvků a odvozujeme trojúhelníkový stěnový konečný prvek, který použijeme ve vytvořeném programu popsáném v praktické části práce. Do programu bude zakomponován i nelineární (pružnoplastický) výpočet s využitím Newton-Raphsonovy metody.

## **Annotation**

The objective of this thesis is to create a program to calculate strains and stresses on arcs. The program should use plane triangular finite elements. The structure would be either a circular or a parabolic arc. Arcs geometry can be defined by a cross-section, a span, a height, a radius and by a finite element division of height of the cross-section.

The thesis includes history and development of finite element method. The derivation of a triangle finite element for plane problem is included. This element is used in the developed program code which also incorporates the Newton-Raphson method. The program includes a nonlinear (elastic-plastic) material model.

### Prohlášení studenta

Prohlašuji, že jsem celou bakalářskou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě .....

.....

podpis studenta

Prohlašuji, že

- byl jsem seznámen s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. – autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo.
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen VŠB-TUO) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě bakalářskou práci užít (§ 35 odst. 3).
- souhlasím s tím, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v Ústřední knihovně VŠB-TUO k prezenčnímu nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího diplomové (bakalářské) práce. Souhlasím s tím, že údaje o bakalářské práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO.
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona.
- bylo sjednáno, že užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).
- beru na vědomí, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě .....

## **1. Úvod**

Tato práce se zabývá metodou konečných prvků a její aplikací na konkrétní druh konstrukce. Zaměřuje se na oblouky kruhové i parabolické (popsané křivkami 2°). V práci jsou popsány metody používané před vznikem metody konečných prvků, poté metoda konečných prvků a její vývoj. V práci je uveden i stručný popis softwarů používaných v dnešní době, které využívají metodu konečných prvků, a také odvození několika typů konečných prvků, které jsou použity v praktické části práce.

Práce je rozdělena do dvou velkých částí. První teoretická část obsahující kapitoly 2-4 uvádí základní vztahy pro rovinné úlohy, odvození konečných prvků a také popisuje nelineární metody řešení úloh. Praktickou část, tvořenou kapitolami 5-6, tvoří vytvořený program na řešení kruhových i parabolických oblouků ve svislé rovině. Do programu je implementována také Newton-Raphsonova metoda pro řešení nelineárních úloh.

## **2. Metoda konečných prvků**

V této kapitole jsou popsány metody, které se používaly, než byla vytvořena metoda konečných prvků. Také je uvedena definice metody podle literatury [3], [4] a popisují její vývoj.

### **2.1. Klasické metody řešení**

Než vznikla metoda konečných prvků, k výpočtům se používaly například variační energetické metody, nebo metoda sítí. Tyto metody jsou náročné na řešení, poněvadž jde o částečně ruční řešení.



### 2.1.1. Variační metody

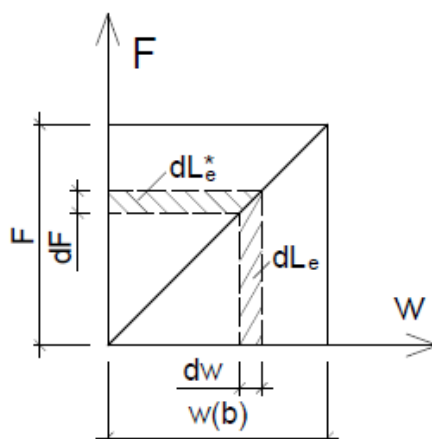
Tyto metody jsou pro uživatele náročné, protože je obtížné najít vhodné aproximace na složitější konstrukci a stejně tak časově i matematicky je derivovat i integrovat a dosadit do nich. Tyto metody využívají variačních principů. U těchto metod se vždy pracuje s nějakým druhem energie. Například se jedná o potenciální energii vnějších a vnitřních sil.

Potenciální energie vnějších sil  $\Pi_e$  je rovna přetvárné práci  $L_e$  vnějších sil, které reprezentují zatížení konstrukce. Současně zavádíme i komplementární přetvárnou práci vnějších sil  $L_e^*$ . Tato zavedená veličina je teoreticky popsitelná jako:

- práce nutná k tomu, aby působení síly  $F$  na dráze  $w$  mělo statický charakter, což je možno si představit jako práci brzdící síly působící proti síle  $F$  na dráze  $w$ . Brzdící sílu si můžeme představit jako odolnost konstrukce
- práce nutná k navrácení konstrukce do původní nedeformované polohy

Tyto práce jsou na obrázku 1.1, kde přetvárná práce je obsah spodní trojúhelníkové části obdélníka o šířce  $w$  a výšce  $F$ . Komplementární přetvárná práce je obsah zbylé horní trojúhelníkové část obdélníka.

obrázek 2.1 - Přetvárná práce vnějších sil

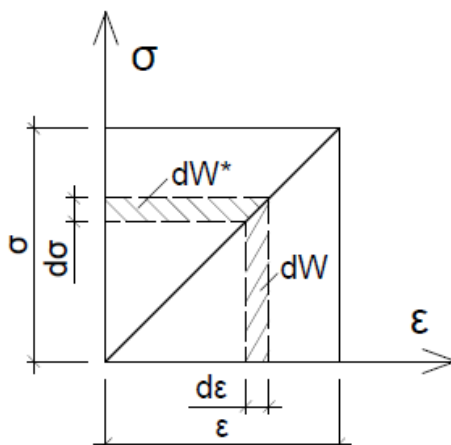


Na základě obrázku 1.1 můžeme tedy napsat rovnost přetvárné práce vnějších sil a komplementární přetvárné práce vnějších sil (1) vyjádřenou jako  $\frac{1}{2}$  obsahu obdélníka. Jde o případ lineární odezvy konstrukce. V nelineárním případě by ve vzorci vystupoval integrál.

$$L_e^* = L_e = \frac{1}{2} Fw \quad (1)$$

Podobně je tomu u potenciální energie vnitřních sil, ale použijeme přetvárnou práci vnitřních sil  $L_i$  a deformační energii  $W$ . Podobnost můžeme vidět z obrázku 1.2, který je podobný obrázku 1.1 až na to, že na osách grafu vystupují poměrné přetvoření  $\varepsilon$  a napětí  $\sigma$ .

obrázek 2.2 - Deformační energie



Opět můžeme pro lineární odezvu materiálu napsat rovnost deformační energie  $W$  a komplementární deformační energie  $W^*$ . Jedná se o  $\frac{1}{2}$  obsahu obdélníka s rozměry  $\varepsilon$  a  $\sigma$ . V případě smyku ve vzorci vystupuje poměrné skosení  $\gamma$  a smykové napětí  $\tau$ . Tyto příspěvky od normálového (2) a smykového napětí (3) jsou vyjádřeny těmito vztahy.

$$W_\sigma^* = W_\sigma = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \quad (2)$$

$$W_\tau^* = W_\tau = \frac{1}{2} \tau \gamma \quad (3)$$

Poněvadž působení vnějších sil vyvolává vznik vnitřních sil (4), platí rovnováha mezi přetvárnou prací vnějších sil  $L_e$  a přetvárnou prací vnitřních sil  $L_i$ .

$$\Pi_i = L_e \quad (4)$$

$$L_i = -L_e \quad (5)$$

Když vyjádříme potenciální energii systému, která je součtem potenciální energie vnějších a vnitřních sil (7), a když do něj dosadíme z (1), (4) a (5), dostaneme Langrangeův princip minima celkové potenciální energie (8), který říká: „Ze všech možných deformačních stavů

tělesa nastane ten, ve kterém je potenciální energie systému minimální“. Ovšem nesmí se porušit spojitost tělesa.

$$\Pi = \Pi_e + \Pi_i = -(L_e + L_e^*) + L_e = -L_e^* \quad (7)$$

$$\Pi = \Pi_e + \Pi_i = \min \quad (8)$$

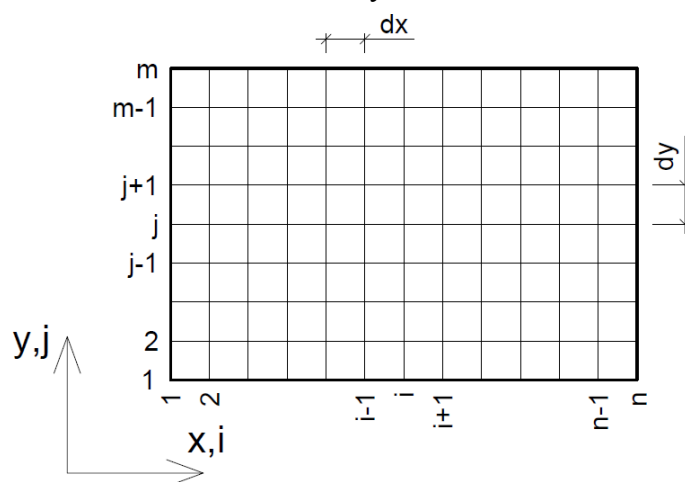
Nyní se dostáváme k řešení variační úlohy, kde se aproximace skutečného průběhu hledané veličiny derivují podle konstant u proměnných charakterizovaných souřadnicovými osami systému a ze znalostí diferenciálního počtu matematiky je v místě nulové derivace funkce lokální minimum, které hledáme. Vyčíslíme konstanty a získáme průběh hledané veličiny.

Přesnost této metody lze ovlivnit volbou aproximační funkce. Mezi variační metody patří i Ritzova metoda, která využívá v této podkapitole popsany postup a která se také využívá při odvozování rovnic konečného prvku. Existují také jiné variační principy [1 kap. 1.5.3].

### 2.1.2. Metoda sítí

Druhým typem klasických metod řešení je metoda sítí. Jde o numerickou metodu. Nemůžeme zjistit přesnost výpočtu bez srovnání s jinou metodou řešení. Používáme je zejména pro stěny a desky a svou podstatou se již začínají přibližovat metodě konečných prvků, ale nejsou zde uplatněny fyzikální vlastnosti materiálu do takové míry.

obrázek 2.3 - Vytvoření sítě



V každé úloze nejdříve provedeme rozdělení konstrukce na uzly, jak to znázorňuje obrázek 2.3. Tím vytvoříme síť uzlů, ve kterých můžeme vypočítat buď velikost Airyho funkce u stěny, nebo průhybu u desky. S využitím diferenčního schématu, které je na obrázku 2.4, sestavíme soustavu lineárních rovnic, kde jsou na pravé straně absolutní členy (tj. členy řádu  $x^0$ ). Počet rovnic je stejný jako počet uzlů sítě uvnitř stěny a zároveň po zavedení okrajových podmínek každá lineární rovnice má právě tento počet neznámých hledaných konstant.

obrázek 2.4 - Diferenční schéma

j+2	0	0	$\alpha^2$	0	0
j+1	0	2	$-4(1+\alpha^2)$	2	0
j	$\beta^2$	$-4(1+\beta^2)$	$8+6\alpha^2+6\beta^2$	$-4(1+\beta^2)$	$\beta^2$
j-1	0	2	$-4(1+\alpha^2)$	2	0
j-2	0	0	$\alpha^2$	0	0
	-2	-1	-	1	2

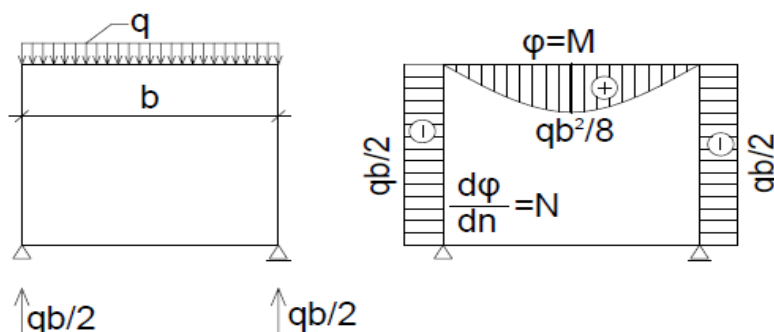
Konstanty  $\alpha$  a  $\beta$  dostaneme jako poměr vzdáleností uzlů sítě ve směru souřadných os (9) a (10).

$$\text{Pro } \Delta x \neq \Delta y \quad \alpha = \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad (9)$$

$$\text{Pro } \Delta x \neq \Delta y \quad \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (10)$$

Problémy nastávají u okrajů stěn a desek. Komplikace vnáší okrajové podmínky, bez kterých ovšem nelze konstrukci řešit. U stěn se aplikuje L'Hermitova analogie, kdy na okrajích známe velikost Airyho funkce jako průběh vnitřních sil na náhradním rámu znázorněného na obrázku 2.5.

obrázek 2.5 - L'Hermitova analogie



U normálových sil ve sloupech rámu můžeme aplikovat vzorce (11-12). V tomto konkrétním případě v příčli normálové síly nevznikají (13-14), ale vzniká v ní ohybový moment (15).

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = N \quad (11)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}}{2\Delta x} = N \Rightarrow \varphi_{i+1,j} = \varphi_{i-1,j} + 2\Delta x \quad (12)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j-1}}{2\Delta y} = N \Rightarrow \varphi_{i,j+1} = \varphi_{i,j-1} \quad (14)$$

$$\varphi = M \quad (15)$$

Po vyřešení soustavy rovnic získáme velikosti Airyho funkce  $\varphi$  v uzlech sítě a následujícími vztahy můžeme dopočítat napětí v uzlech této sítě. Jedná se o druhé derivace Airyho funkce  $\varphi$ . U normálových napětí derivujeme podle jedné souřadnice dvakrát a to pro napětí  $\sigma_x$  podle  $y$  a naopak. Pro smykové napětí provádíme smíšené derivace. Celkově máme 3 složky napětí  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ , z čehož můžeme získat 3 složky vnitřních sil  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_{xy}$ .

$$(\sigma_x)_{i,j} = \frac{\partial^2 \varphi_{i,j}}{\partial y^2} = \frac{\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \quad (16)$$

$$(\sigma_y)_{i,j} = \frac{\partial^2 \varphi_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \quad (17)$$

$$(\tau_{xy})_{i,j} = -\frac{\partial^2 \varphi_{i,j}}{\partial x \partial y} = -\frac{\varphi_{i+1,j+1} + \varphi_{i-1,j-1} - \varphi_{i+1,j-1} - \varphi_{i-1,j+1}}{4\Delta x \Delta y} \quad (18)$$

U okraje desky řešíme situaci podle způsobu uložení. Buďto je průběh průhybu symetrický podle svislé osy  $z$  v případě vetknutého okraje desky, středově souměrný podle uzlu na kloubově uložené hraně desky, nebo u volného konce pokračuje průhybová čára jakoby dále. Všechny případy řešíme opět jako derivace průhybové čáry desky (20-24), kde  $D$  vystupuje jako desková tuhost (19). U desek vzniká 5 složek vnitřních sil  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_{xy}$ ,  $q_x$ ,  $q_y$  ze složek napětí, poněvadž desky jsou jako takové zatěžovány kolmo na nedeformovanou střednicovou rovinu. U stěnodesek přibývají další složky vnitřních sil  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_{xy}$ .

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} \quad (19)$$

$$m_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (20)$$

$$m_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (21)$$

$$m_{xy} = -D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (22)$$

$$q_x = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \mu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (23)$$

$$q_y = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \mu \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \quad (24)$$

V této kapitole jsme se zabývali obecným postupem metody sítí. Více k řešení plošných konstrukcí metodou sítí je uvedeno v [2].

## **2.2. Definice metody konečných prvků**

V literatuře se vyskytuje jedna definice v trochu rozdílných podobách, ale o stejném významu: „Metoda konečných prvků je obecná numerická metoda řešení konstrukcí, kdy se řešená oblast rozdělí na menší celky, tzv. konečné prvky. Může být použita v celé řadě úloh stavební mechaniky a také při proudění kapalin, či při šíření tepla.“

V této metodě dochází k dělení řešené oblasti na konečné prvky. Podle valence uzlů přidělíme každému uzlu určitý počet kódových čísel. Na konečném prvku odvodíme potřebné vztahy, zejména matici tuhosti konečného prvku  $K_e$ . Pro její výpočet použijeme buď variační metody, nebo numerickou integraci. Následuje sestavení matice tuhosti celé konstrukce a zatěžovacího vektoru. V této fázi metody použijeme tzv. adiční teorém (25), což je součet potenciálních

energie všech konečných prvků a tato sečtená energie by měla být nenulová, ale měla by být co možná nejmenší. Dostaneme se tedy k variačním principům.

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \Pi_i \quad (25)$$

Při výpočtu se dostaneme k řešení soustavy rovnic (26), což je hlavní část metody.

$$[K] \cdot \{r\} = \{F\} \quad (26)$$

### **2.3. Vývoj metody konečných prvků**

Za rok vzniku metody konečných prvků je považován rok 1941 nebo 1942, kdy bylo potřeba řešit složitější úlohy, a nestačily klasické metody řešení. Nicméně většího využívání se metoda konečných prvků dočkala v letech 1955-1965. Do této doby se datují první konference s tématem metody konečných prvků.

Ovšem metoda nebyla zpracována do úrovně dnešních softwarů využívajících metodu konečných prvků. Metoda byla provozována na sálových počítačích, kde se řešily soustavy lineárních rovnic. Přitom hodně výpočetní práce prováděly týmy inženýrů, kde každý člen ovládal současně znalosti stavební mechaniky, matematiky i programování. V každé úloze se samostatně vytvářela síť konečných prvků na programátorské úrovni zadávání vstupních dat.

V literatuře [3] jsou uvedeny případy, například jak jednou zákazník potřeboval vyřešit nějakou úlohu a neměl vůbec žádná vstupní data. Domníval se, že metodou konečných prvků jde řešit všechno i bez vstupních dat, což je nesmysl. Přitom ve stavební mechanice máme vždy nějaká vstupní data v podobě zatížení a geometrie konstrukce.

Mezi lety 1965-1990 probíhala specializace profesí projektant, matematik a programátor, a v dnešní době jsou v praxi používány softwary, u kterých by měl jejich uživatel vědět alespoň důležité věci o použité metodě řešení a měl by je umět ovládat. Nemusí ovšem nic

vědět o programování, protože se o tuto část výpočtu stará samotný program využívající metodu konečných prvků. [3]

Dnes ovšem někdy narážíme na otázku, zda se vyplatí software koupit nebo si výpočet nechat provést u jiné firmy a zaplatit za to. Běžné projekční kanceláře většinou disponují MKP softwarem pro prutové konstrukce, případně pro řešení desek nebo stěn. Záleží právě na rozsahu statických výpočtů, které konkrétní projekční kancelář provádí [3]. Ceny takových softwarů se mohou pohybovat od 10000 Kč výše.

## **2.4. Nelineární úlohy MKP**

Metodou konečných prvků můžeme řešit konstrukce i s nelinearitami. Obecně jsou nelinearity trojího druhu a to konstrukční, fyzikální a geometrické. Nejdříve však musíme definovat, co to je lineární úloha. Lineární chování znamená platnost Hookeova zákona a platí, že se po odlehčení vrátí do původního stavu před jejím zatížením.

Mezi konstrukční nelinearity patří například pruty působící jen v tahu, což je příklad ztužidel tvořených profilem z ocelové kulatiny. Je to způsobeno malou vzpěrnou odolností. Obdobně nevyztužený beton často považujeme za nepůsobící v tahu.

Mezi geometrické nelinearity, které patří mezi nejaplikovanější při návrhu konstrukcí, patří zejména imperfekce (výrobní nepřesnosti). Žádný vyrobený válcovaný profil ani betonový prvek není ideálně přímý. Tyto nelinearity do výpočtů zavádíme, poněvadž softwary počítají s ideální konstrukcí (tj. bez imperfekcí, přesných rozměrů), čehož ve skutečnosti nikdy nemůžeme dosáhnout. Technické normy nám dávají pokyny, jak tyto nelinearity do výpočtu jednoduše zavést i když to jde v některých softwarech udělat detailněji, ale zabere to více času namodelovat tyto nelinearity. Vyplatí se to zejména u neobvyklých konstrukcí. Ohledně zavedení geometrické nelinearity do výpočtu v softwaru odkazují na manuály ke konkrétnímu softwaru.



Fyzikální nelinearity jsou zejména pružnoplastické vlastnosti materiálu. Aplikujeme většinou přírůstkové, iterační nebo přírůstkově-iterační metody řešení. O těchto metodách je více řečeno v dalších odstavcích této podkapitoly.

Od řešení základní lineární úlohy se nejméně liší přírůstkové metody. Rozdílem je, že se zatěžování neprovádí plnou hodnotou zatížení, ale po zatěžovacích krocích (přírůstcích). Po každém zatěžovacím kroku zanalyzujeme napjatost v konečných prvcích a případně upravíme jeho tuhost. Za první přírůstek obvykle volíme taková velikost zatížení, že extrémní napětí vyvolané v konstrukci je o trochu menší než mez kluzu materiálu. Dále postupujeme po malých přírůstcích až do dosažení celé velikosti zatížení nebo kolapsu konstrukce. U velikosti přírůstků nemůžeme jednoznačně říct, zda je malý nebo příliš velký, poněvadž nejideálnější jsou co nejmenší přírůstky, ale na druhou stranu bychom se dopočítali za velmi dlouhou dobu. Musíme tedy udělat kompromis mezi těmito dvěma faktory.

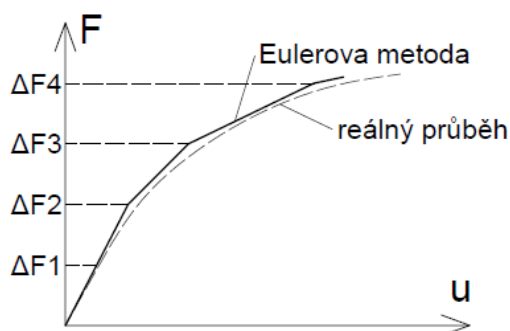
Typickou přírůstkovou je Eulerova metoda (27). Jde o to, že v každém zatěžovacím kroku analyzujeme napjatost v každém konečném prvku a případně upravujeme jeho tuhost. Přitom sčítáme napětí z každého zatěžovacího kroku, potřebnou pro analýzu napjatosti na konečných prvcích konstrukce (28).

$$[K(\dot{r})] \cdot \{\dot{r}\} = \{\dot{F}\} \quad (27)$$

$$\sigma_e = \sum_1^j \dot{\sigma}_e \quad (28)$$

Matice tuhosti konstrukce  $K$  je pak vlivem možné změny tuhosti některého konečného prvku funkcí napětí a tedy i posunutí uzlů sítě (27). Veličiny s tečkou jsou přírůstky.  $\sigma_e$  je obecně největší napětí na konečném prvku a horní hranice sumy  $j$  je číslo aktuálního zatěžovacího kroku, takže sčítáme napětí z předchozích zatěžovacích kroků plus napětí z aktuálního zatěžovacího kroku. Průběh napětí a posunutí, kdy se v konstrukci vyskytují některé prvky v plastickém stavu, znázorňuje obrázek 2.6.

obrázek 2.6 - Eulerova metoda



Zavedením iterace do každého zatěžovacího kroku se dostaneme k **Newton-Raphsonově metodě**. Rozdíl grafů na obrázku 2.6 se tím začne zmenšovat. Kvůli iteraci musíme zavést vektor nevyvážených sil, poněvadž když změníme tuhost některého prvku, přestane platit rovnováha sil na řešené konstrukci. Postup metody je v každém zatěžovacím kroku následovný: Vypočteme maximální napětí na prvcích, na základě napjatosti upravíme tuhost některého prvku a vytvoříme novou matici tuhosti konstrukce  $K'$ . Vektor nevyvážených sil  $G$  pak dostaneme ze vztahu (29).

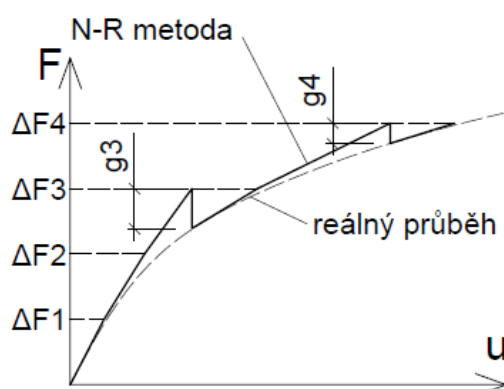
$$([K] - [K']) \cdot \{\dot{r}\} = \{G\} \quad (29)$$

V dalších iteračních krocích už zatěžujeme konstrukci vždy jen vektorem nevyvážených sil, dokud nebude dostatečně malý (tzv. kritérium konvergence). Pak ukončíme iteraci a přejdeme k dalšímu zatěžovacímu kroku. Že je vektor nevyvážených sil dostatečně malý, zjišťujeme například pomocí poměru (24) euklidovské normy vektoru nevyvážených sil  $G$  a zatěžovacího vektoru  $\dot{F}$  pro konkrétní zatěžovací krok. Pokud je podmínka (30) splněna, je vektor nevyvážených sil dostatečně malý. Za  $\varepsilon$  obvykle volíme číslo z intervalu  $(10^{-4}; 10^{-2})$  nebo také menší, čímž ovšem za cenu přesnosti prodloužíme dobu výpočtu.

$$\frac{\|G\|}{\|\dot{F}\|} \leq \varepsilon \quad (30)$$

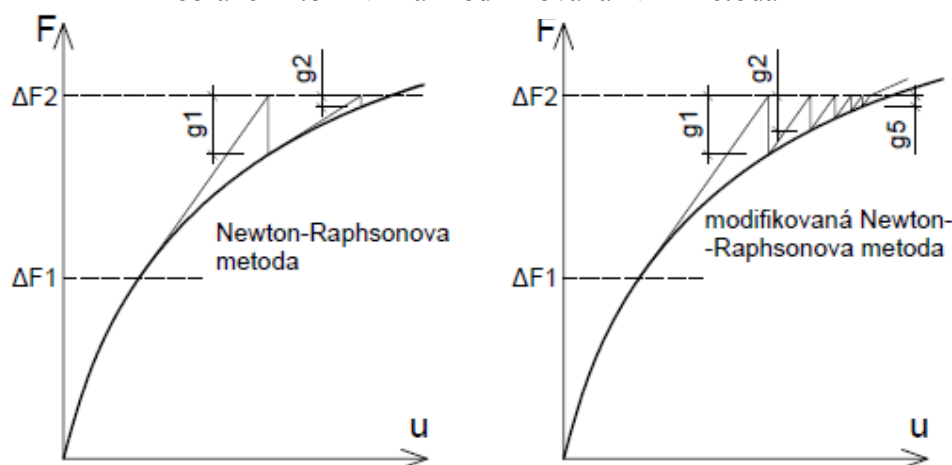
Graf závislosti napětí na posunutích uzlů je pak zobrazen na obrázku 2.7.

obrázek 2.7 - Newton-Raphsonova metoda



Pokud bychom v iteracích neměnili tuhost žádného konečného prvku, dostali bychom se k **modifikované Newton-Raphsonově metodě**. Budeme muset ale provést více iterací za cenu ušetření času u sestavování matice tuhosti konstrukce  $K$  v každé iteraci. Porovnání závislosti napětí na deformaci je pak znázorněn na obrázku 2.8 (vlevo N-R, vpravo modifikovaná N-R metoda).

obrázek 2.8 - N-R a modifikovaná N-R metoda



Kdybychom provedli pouze jeden zatěžovací krok o celé velikosti zatížení, dostaneme se k **iterační metodě**, která není vhodná pro fyzikálně nelineární úlohy. Tato metoda je dobře použitelná pro úlohy konstrukčně nelineární, například pro příhradové konstrukce, kde výplňové pruty tvoří ztužidla z kulatiny, která nejsou nosná v tlaku.

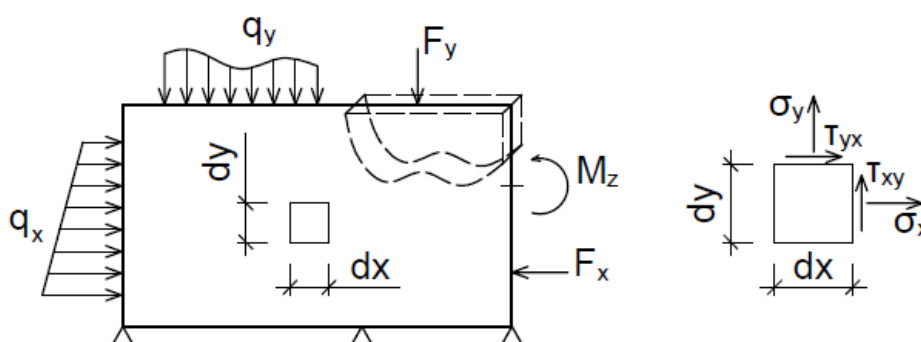
### **3. Odvození konečných prvků**

V této kapitole jsou odvozeny vztahy pro základní lineární úlohu metody konečných prvků s využitím několika jednoduchých typů rovinných konečných prvků. Zaměřil jsem se na rovinné konečné prvky, protože oblouky budu řešit pouze v rovině, nikoliv v prostoru. Nicméně princip odvození je podobný a je obsažen v [5] a [6], ze kterých jsem hodně čerpal ve fázi odvození konečných prvků.

#### **3.1. Základní vztahy teorie pružnosti.**

Nyní se zabýváme základními vztahy pro rovinný problém. Nejprve se však musíme zaměřit na podepření konstrukce. Na obrázku 3.1 můžeme vidět jednu z možností podepření obdélníkové stěny.

obrázek 3.1 – Obecně zatížená stěna



Na stěně vznikají 4 složky napětí  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ , z nichž  $\sigma_z$  přímo neovlivňuje ostatní složky, spíše je jejich funkcí. Co na obrázku nevidíme, jsou složky posunu  $u$  a  $v$  a složky poměrných deformací  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$ . Všechny tyto veličiny jsou na začátku neznámé a jsou právě to, co chceme vypočítat.

Vždy platí podmínka, že osy podepření se nesmí protínat v 1 bodě, jinak může dojít k pootočení tělesa. Stejně tak u prostého nosníku i u stěn namáhaných ve střednicové rovině platí stejné podmínky rovnováhy (31,32).

$$\sum F_{x,i} = 0 \quad (31)$$

$$\sum F_{y,i} = 0 \quad (32)$$

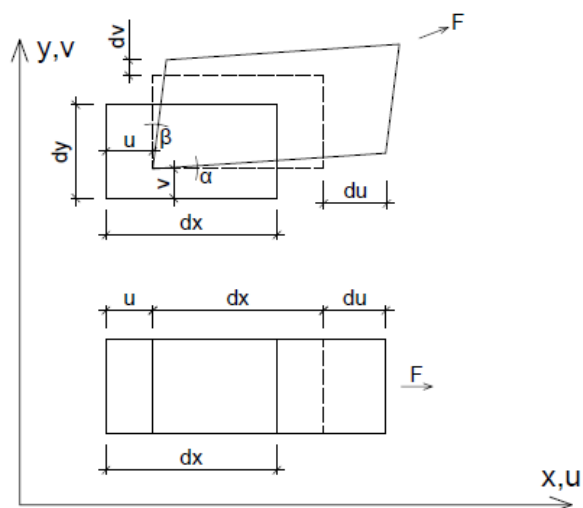
Podmínky rovnováhy (31,32) platí pro celou konstrukci. Ovšem můžeme také napsat podmínky pro element stěny (velmi malý výřez). Pak jim říkáme diferenciální podmínky rovnováhy (33,34). Jde opět o sumu všech působících sil v daném směru na zvoleném elementu, kde  $X$  a  $Y$  charakterizují objemová zatížení na elementu. Poněvadž se jedná o element stěny, vystupují ve vztazích (33,34) diferenciály.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad (33)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \quad (34)$$

Poměrná přetvoření  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  odvozujeme ze složek posunutí  $u$  a  $v$  jako jejich derivace. Na základě obrázku 3.2 můžeme napsat vztahy (35-37), tzv. geometrické rovnice. Tyto rovnice ovšem platí pro malé deformace, přičemž pro větší deformace se definují jiné rovnice.

obrázek 3.2 - Deformace elementu tělesa



$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (35)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (36)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (37)$$

Změna napětí vlivem zatížení je závislá na deformaci konstrukce. Je tomu tak, protože bez deformací způsobených při zatěžování konstrukce nemůžeme u deformační varianty metody konečných prvků vypočítat napětí, které je funkcí deformací. Jednoduše si to můžeme představit jako případ, kdy máme gumu, co se dává do kalhot kolem pasu. Na začátku není v gumě vůbec žádné napětí. Podle toho jak moc gumu natáhneme, takové v gumě vznikne napětí. Pro jednoosou napjatost platí vztah (38).

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (38)$$

V této závislosti (38) však hraje roli fyzika. Do této závislosti je zavedena v podobě 2 vlastností materiálu (fyzikální konstanty). Jedná se o Youngův modul pružnosti  $E$  a Poissonův součinitel příčné deformace  $\mu$ . U izotropních materiálů do výpočtu vstupuje 1 Youngův modul pružnosti a 1 Poissonův součinitel příčné deformace. U anizotropních materiálů zavádíme do výpočtu 21 nezávislých fyzikálních konstant pro prostorovou napjatost.

Závislost napětí na deformacích vyjadřují tzv. fyzikální rovnice nebo také tzv. konstitutivní vztahy. Rovnice (39,40) v maticovém zápisu platí pouze pro napjatost v rovině. Pro prostor jsou vztahy rozšířeny. Oba vztahy (39,40) vyplývají z (38).

$$\{\sigma\}^T = [D] \cdot \{\varepsilon\}^T = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1 - \mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 + \mu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (39)$$

$$\{\sigma\}^T = [D] \cdot \{\varepsilon\}^T = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \begin{bmatrix} 1 - \mu & \mu & 0 \\ \mu & 1 - \mu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \mu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (40)$$

Pro rovinný problém existují dva typy úlohy. (39) charakterizuje rovinnou napjatost a (40) charakterizuje rovinnou deformaci. V matici  $D$  vyjadřující tuhost může vystupovat i více nezávislých fyzikálních konstant  $E$  a  $\mu$ , pro jiné než izotropní materiály.

Každý stav se používá pro jiné úlohy. Rovinná napjatost je typická pro většinu úloh, kde známě tloušťku stěn. Jedná se o stěny, stěnové nosníky apod. Rovinnou deformaci používáme u dlouhých liniových staveb, kde zkoumáme napjatost v příčném řezu stavby. Typickým příkladem jsou tunely.

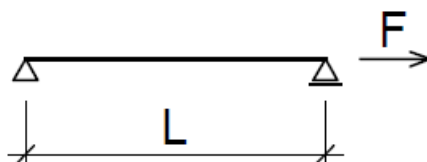
Pro shrnutí v rovině jsme uvedli 2 podmínky rovnováhy, 3 geometrické rovnice a 3 fyzikální rovnice, což je dohromady 8 rovnic. Co se týká počtu neznámých tak máme 2 složky posunutí  $u$  a  $v$ , 3 poměrné deformace  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  a 3 složky napětí  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ . Pro 8 rovnic máme 8 neznámých což ideální stav. Tímto jsme uvedli základní vztahy pro rovinný problém. Pro prostor je můžeme najít v [1- bod 1.2].

### **3.2. Odvození příhradového prutu Ritzovou metodou**

V této podkapitole uvádím příklad odvození prutu příhradové konstrukce v rovině, který by se dal také chápat jako konečný prvek celé konstrukce při zavedení odvozeného vzorce do matice tuhosti prutu, a poté jako u obecné deformační metody můžeme řešit celou konstrukci. Ritzova metoda patří mezi klasické variační metody, které jsou více popsány v kap. 2.1.

Jde o stanovení funkce osové deformace prutu. Na obrázku 3.3 můžeme vidět příhradový prut vyříznutý z konstrukce. V tomto případě uvažujeme na jedné straně pevné uložení (styčník konstrukce) a na druhé straně je prut namáhán osovou silou  $F$  (normálová síla v prutu). Průběh normálové síly po délce prutu  $L$  je konstantní o velikosti působící síly  $F$ .

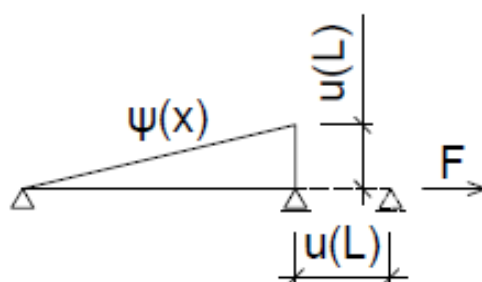
obrázek 3.3 - Vyříznutý příhradový prut



Poněvadž odvozujeme Ritzovou metodou (variační metoda), je zřejmé, že musíme průběh deformace aproximovat nějakou funkcí. V tomto případě je volba jednoduchá. Po délce prutu bude velikost osově deformace lineárně narůstat (obrázek 3.4), a proto volíme funkci (41).

$$u(x) = a_1 \psi_1 = a_1 x \rightarrow \psi_1 = x \quad (41)$$

obrázek 3.4 - Příhradový prut - aproximační funkce



Podle průběhu aproximační funkce můžeme také napsat 2 okrajové podmínky (42,43) na koncích prutu. Podmínka (43) bude platit v případě, že působící síla bude nenulová.

$$u(a) = u(x = 0) = 0 \rightarrow \psi_1(a) = x = 0 \quad (42)$$

$$u(b) = u(x = L) \neq 0 \rightarrow \psi_1(b) = x = L \quad (43)$$

Nyní přecházíme k potenciální energii prutu. Potenciální energie vnějších (44) sil je virtuální práce zatížení  $F$  na posunutí  $u$  na zatíženém konci prutu (45).

$$\Pi_e = -Fu - \int_0^L qu(x)dx \quad (44)$$

Dosazením do vzorce (44) za souřadnici  $x$  dostaneme právě vztah (45). Integrál pro spojitá zatížení v (44) nepoužijeme.

$$\Pi_e = -Fu = -Fa_1\psi_1 = -Fa_1x = -Fa_1L \quad (45)$$

Pro vyjádření potenciální energie vnitřních (46) sil je zapotřebí derivovat aproximační funkci (47).

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_0^L EA(u')^2 dx \quad (46)$$



$$u' = [a_1 x]' = a_1 \quad (47)$$

Dosazením do (46) za  $u'$  dostaneme (48).

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_0^L EA a_1^2 dx = \frac{EA a_1^2}{2} \int_0^L dx = \frac{EAL}{2} a_1^2 \quad (48)$$

Nyní když máme vyjádřenou potenciální energii vnějších i vnitřních sil, můžeme obě sečíst (49) a dostaneme celkovou potenciální energii prutu (50).

$$\Pi = \Pi_e + \Pi_i = \min \quad (49)$$

$$\Pi = -FLa_1 + \frac{EAL}{2} a_1^2 \quad (50)$$

Když máme vyjádřenou potenciální energii prutu, přecházíme k Lagrangeovu variačnímu principu minima celkové potenciální energie (49). Zderivujeme celkovou potenciální energii podle neznámé konstanty  $a_i$  (51) a získáme tak lineární rovnici (52), ze které vyjádříme neznámou konstantu  $a_1$  (53).

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0 \quad (51)$$

$$-FL + \frac{EAL}{2} a_1 = 0 \quad (52)$$

$$a_1 = \frac{F}{EA} \quad (53)$$

Když dosadíme vypočtenou konstantu (53) do aproximační funkce (41), můžeme vyjádřit maximální protažení na prutu (54).

$$u(L) = \frac{FL}{EA} \quad (54)$$

Tímto jsme dostali hledaný vztah (54), ze kterého se dá převrácením zlomku vyjádřit konstant tuhost příhradového prutu (55) obsahující konstanty  $E$ ,  $A$ ,  $L$  charakterizující materiálové a geometrické charakteristiky a geometrii prutu.

$$k = \frac{EA}{L} \quad (55)$$

Pravá strana vztahu (55) tvoří některé členy matic tuhosti rámových konstrukcí.

Metodě konečných prvků pro prutové konstrukce se svým algoritmem blíží **obecná deformační metoda**, která se však odvozuje zcela jinak. V následující podkapitole přecházíme k plošným konstrukcím, a tedy i plošným konečným prvkům. Odvození bude složitější, vlivem složitějších aproximačních funkcí.

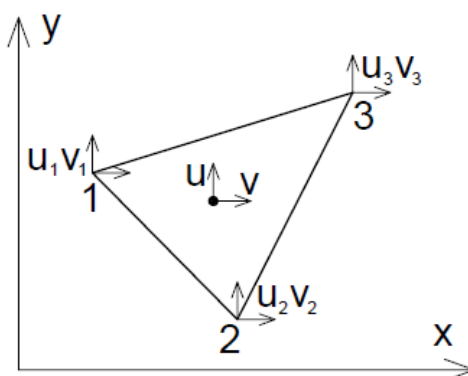
### 3.3. Rovinná úloha

V této podkapitole uvádíme zejména odvození použitého trojúhelníkového prvku, ale zmíníme se i o dalších tvarech konečných prvků pro rovinnou úlohu.

#### 3.3.1. Odvození trojúhelníkového konečného prvku

Nejjednodušší plošný prvek pro rovinný problém je trojúhelníkový prvek s lineárními aproximačními funkcemi. Na obrázku 3.5 můžeme takový prvek vidět. Poněvadž se jedná o rovinný problém, existuje možnost posunu každého z vrcholů posunout se ve dvou na sebe kolmých směrech.

obrázek 3.5 - Trojúhelníkový konečný prvek



Celkem tedy dostáváme 6 možných posunů  $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3$ . V literatuře [5,6] jsou tyto posuny různě uspořádané, nicméně to nijak nezmění jejich význam. Rozhodl jsem se pro

odvození podle [5], poněvadž jsem takto odvozený prvek již několikrát použil v posledních ročnících v několika semestrálních projektech.

Nyní když známé možné posuny musíme zvolit aproximační funkce. Budeme volit mocniny souřadnic  $x$  a  $y$  co nejmenší, aby zaprvé bylo odvození jednodušší a aby bylo univerzální pro tento konečný prvek. Poněvadž máme 6 neznámých posunů, musíme použít 6 neznámých konstant  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  v aproximačních funkcích. Protože se jedná o rovinný problém, pro libovolný bod musíme napsat 2 aproximační funkce. Jednu (56) pro posun rovnoběžně s osou  $x$  a druhou (57) pro posun rovnoběžně s osou  $y$ .

$$u(x, y) = a_1 x + a_2 y + a_3 \quad (56)$$

$$v(x, y) = a_4 x + a_5 y + a_6 \quad (57)$$

V aproximačních funkcích jsme tedy splnili podmínku, že pro 6 neznámých posunů všech uzlů jsme použili aproximační funkce s 6 neznámými konstantami. V další části se budeme pokoušet nějak zjistit velikost těchto konstant. Je vhodné zapsat vztahy (56) a (57) do maticové podoby (58).

$$u = Ua = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (58)$$

Když za  $x$  a  $y$  v (58) dosadíme postupně souřadnice uzlů konečného prvku, můžeme napsat vztah (59), ve kterém vyjádříme neznámé posuny uzlů  $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3$ .

$$r = Sa = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (59)$$

Ze vztahů pro vyjádření poměrných deformací elementu (35-37) stěny  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  (obrázek 3.2) můžeme v jejich kombinaci s vztahem (58) dostat vztah (59), kterým vyjádříme tyto poměrné deformace na odvozovaném konečném prvku.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = Ba = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (60)$$

Matici  $B$  jsme získali jako součin matice derivací vycházející ze vztahů (35-37) a maticí  $U$  ze vztahu (58). Nyní máme první část pravé strany v podobě matice  $B$  vyčíslenou a přecházíme k vektoru aproximačních konstant  $a$ . Tu získáme úpravou vztahu (59) kdy dostaneme (61).

$$a = S^{-1}r \quad (61)$$

Dosazením za vektor (61) a do vztahu (60) získáme vztah (62) vyjadřující poměrné deformace.

$$\varepsilon = BS^{-1}r \quad (62)$$

Nyní můžeme přistoupit k vyjádření potenciální energie vnitřních sil. Za vektor napětí  $\sigma$  dosadíme podle vztahu (39) nebo (40). Matici tuhosti  $D$  a vyjádřený vztah (62) pro poměrné deformace  $\varepsilon$ . Úpravami pak dostaneme vztah (63) pro potenciální energii vnitřních sil.

$$\Pi_i = \frac{1}{2} r^T \int_V S^{-1T} B^T D B S^{-1} dV r \quad (63)$$

Integrál po objemu konečného prvku tvoří tzv. **matici tuhosti konečného prvku**  $K_e$ . Integrovat nebude v tomto případě zapotřebí, protože ve všech maticích vystupují jen konstanty. Postačí ho nahradit součinem plochy konečného prvku a tloušťky stěny. Když přidáme potenciální energii vnějších sil, získáme vztah (64) a jeho dalšími úpravami lze získat obdobu základního vztahu metody konečných prvků (26).

$$\Pi = \frac{1}{2} r^T K r - F^T r \rightarrow 0 \quad (64)$$

$$K r = F \quad (26)$$

Tímto jsme odvodili vztahy potřebné pro vytvoření matice tuhosti konečného prvku  $K_e$ . Následně poskládáme matici  $K$  pomocí adresace kódovými čísly a teprve pak přistupujeme k řešení soustavy rovnic. Po vyřešení získáme vektor posunutí uzlů  $r$  a z něj můžeme s využitím kombinace vztahů (62) a (39) nebo (40) vyjádřit napětí vztahem (65).

$$\{\sigma\}^T = [D]\{\varepsilon\}^T = [D][B][S]^{-1}\{r\}^T \quad (65)$$

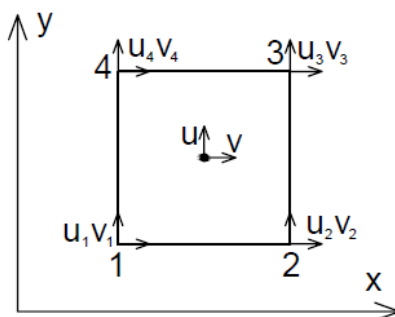
Případně můžeme užít vztah (66) pro výpočet hlavních napětí při znalosti osových napětí.

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (66)$$

Pro výpočet napětí (65) musíme vypočítat i posuny uzlů (26) a poměrné deformace (62) konečných prvků.

### 3.3.2. Čtyřúhelníkový konečný prvek

obrázek 3.6 - Čtyřúhelníkový konečný prvek



Odlišnost tohoto konečného prvku od trojúhelníka je v tom, že přibývá jeden uzel. Tudiž hledáme jiné aproximační funkce (67, 68) a odvození bude o něco komplikovanější.

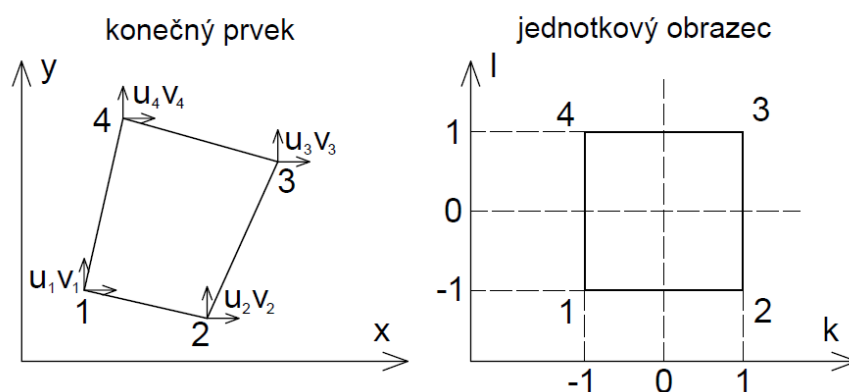
$$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \quad (67)$$

$$v(x, y) = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy \quad (68)$$

Ačkoliv se může zdát rozdíl malý, když bychom chtěli vyjádřit matici  $B$  jako obdobu (60), kde zůstaly pouze konstanty bez proměnných  $x$  a  $y$ , dostaneme v jejích členech tyto proměnné v 1. mocnině. Při integraci (63) už nemůžeme  $B$  vytáhnout před integrál a budeme muset použít numerickou integraci.

### 3.3.3. izoparametrický konečný prvek

obrázek 3.7 – Izoparametrický konečný prvek



Používají se také izoparametrické prvky. Jde o prvky, u kterých konečný prvek převádíme na jednotkový obrazec (obrázek 3.7) pomocí tvarových funkcí. Integraci pro odvození matice tuhosti  $K_e$  provádíme právě na tomto jednotkovém obrazci. Ačkoli se používá označení „jednotkový“, netýká se to velikosti prvku ale souřadnic uzlů. V souřadnicích vystupuje buď 0, 1 nebo -1. Odvození tohoto konečného prvku je poměrně složitější než výše uvedené [5 kap. 4.4].

## **4. Softwary využívající metodu konečných prvků**

V této kapitole jsou popsány v první řadě nejčastěji řešené úlohy a následně i některé dnes používané softwary, které využívají metodu konečných prvků. Zmíníme se také o softwarech užívaných v dřívější době. Hlavní změnou oproti počátkům metody konečných prvků je způsob zadávání konstrukce a vyhodnocování výsledků.

### **4.1. Řešené úlohy**

Dnes patří mezi nejčastěji řešené úlohy pomocí 2D a 3D konečných prvků detaily konstrukce. Sám jsem si vyzkoušel výpočet ocelové haly, kde jsem řešení střechy rozkládal na řešení vaznice a řešení příhradového vazníku. Vazník byl kloubově uložen na sloupech, a tak jsem

ho nahrazoval tuhým ramenem kloubově uloženým na vrcholech sloupů. Vše bylo řešeno v rovině jedné příčné vazby.

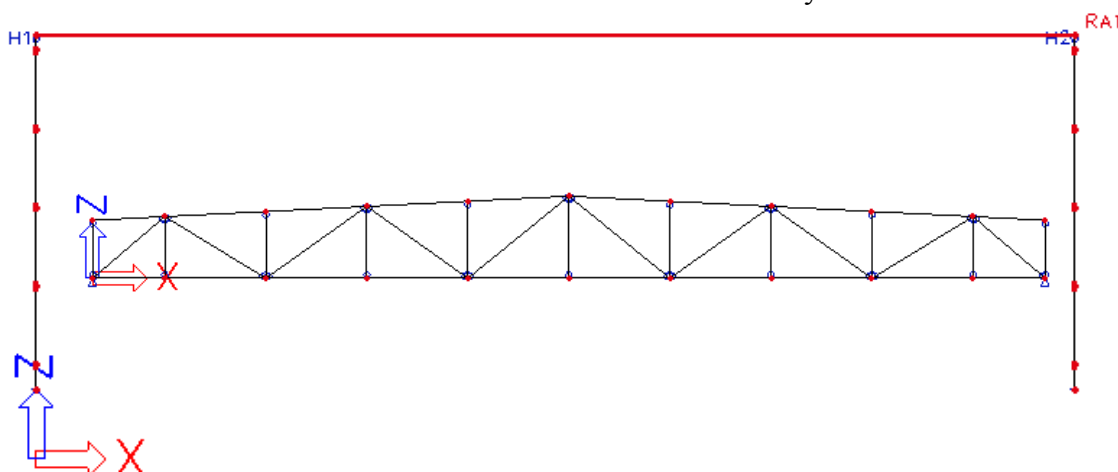
Ovšem celou halu je možno řešit i jako 3D model, což je ovšem značně náročnější vymodelovat. U modelování platí pravidlo, že čím složitější model, tím více chyb v modelování je možné udělat. Problematické bývá nejčastěji řešení spojení konstrukčních prvků tak, aby bylo reálně namodelováno spolupůsobení těchto spojení.

Zatím ale nebylo nic řečeno o typech řešených konstrukcí. Nejčastěji modelujeme prutové konstrukce, které začínají u prostého nosníku a můžou končit až u prostorové několikapatrové rámové konstrukce. Modelovat můžeme ale i plošné konstrukce, což jsou desky nebo stěny případně skořepiny.

Modelovat teoreticky lze i tělesa, ale to je spíše mimo záběr statiky konstrukcí. Mohlo by se využít u přesného modelování malých součástek strojů nebo třeba v geotechnice při modelování podloží pod složitější stavbou.

Dnes existuje i mnoho metod řešení konstrukcí, a to lineárních i nelineárních. Základem všech softwarů je lineární řešení prutových konstrukcí, které patří mezi nejčastěji řešené úlohy. Co

obrázek 4.1 – Příčná vazba ocelové haly



se týká nelineárních metod řešení, patří sem zejména Newton-Raphsonova metoda.

Velmi užitečný je stabilitní výpočet, např. při výpočtu ocelové haly (obrázek 4.1). Leonard Euler odvodil z diferenciální rovnice 2. řádu vztahy pro osově zatížený prut. Ovšem při zapojení prutu do konstrukce prut není prakticky vždy namáhán jen osovým tlakem, ale navíc i dalšími vnitřními silami. Tuhé rameno tvořící příčel je tvořeno příhradovým vazníkem vyobrazeném na témže obrázku.

Výše v textu jsou popsány různé metody řešení. Ovšem tyto softwary bývají nákladné. Většinou se prodávají různé funkce programů, takže si zákazník koupí jen to, co využije, a neplatí za funkce, které vůbec nevyužívá.

#### **4.2. Dříve používané softwary**

Měl jsem možnost vyzkoušet program NEXIS, ale v té době již byla ve škole k dispozici studentská verze programu Scia Engineer. Nicméně program NEXIS, předchůdce programu Scia Engineer, ještě někteří uživatelé používají.

O starších programech lze získat informace v [3]. V této podkapitole jsou uvedeny jen stručné informace. Mezi první programy v Československu, při výpočtech používající metodu konečných prvků, patří program NE-XX. Umožňuje řešit prutové konstrukce, stěny, desky i skořepiny. Plošné konstrukce lze kombinovat s prutovými. Tento program měl však omezen počet konečných prvků i uzlů.

S možností řešit tělesa následně přicházely program GFEM od EDS-UNIGRAPHICS a ANSYS. I většina dalších vzniklých programů už uměla řešit i tělesa. Mezi později vzniklé softwary patří např. program RELAX.

Ansysis také přišel s řešením úloh s počáteční napjatostí, stejně jako COSMOS/M. Tím jsme prakticky vyjmenovali většinu z rozsahu možných úloh.



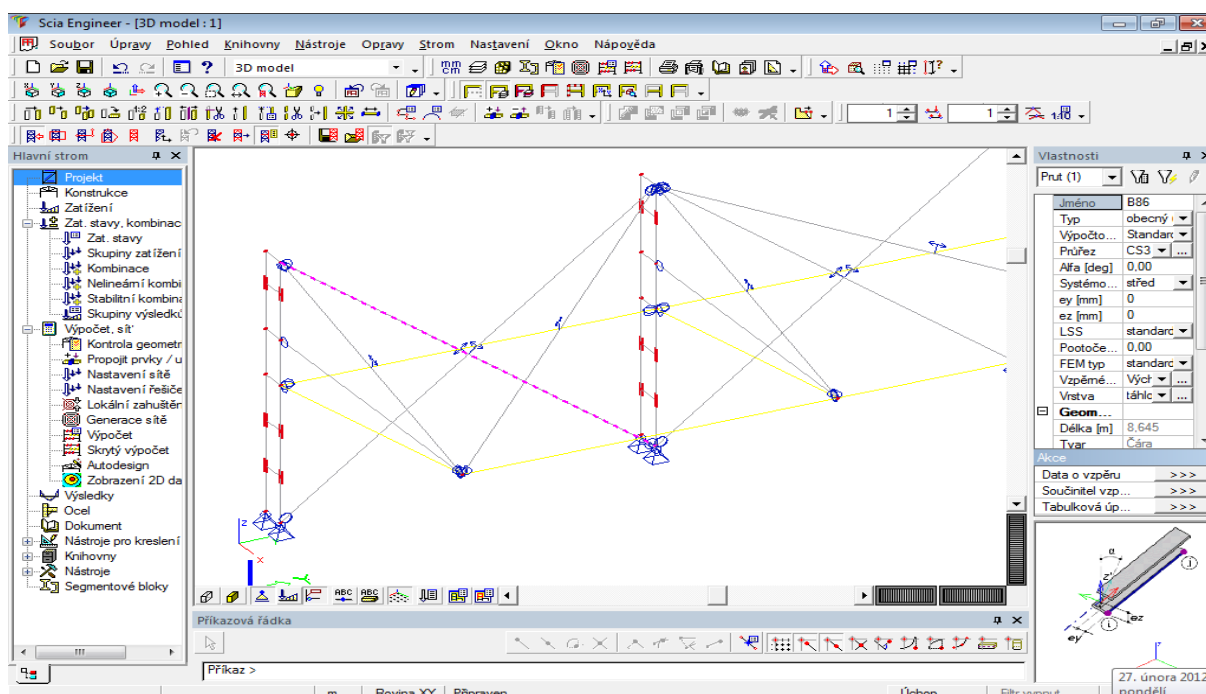
### 4.3. NEXIS, Scia Engineer

Oba tyto softwary jsou používány i v dnešních dnech. Scia Engineer je totiž následníkem NEXISu, jemuž předcházely programy NE-XX a další.

Pro výpočty stavební mechaniky, jsem zpočátku používal také německý program Ruck Zuck, který je založen na obecné deformační metodě, na výpočty jednodušších nosníků a rámců, zejména kvůli jeho jednoduchosti.

Z podobných programů jsem nejvíce používal právě program Scia Engineer. Program vybavený všemi funkcionalitami má široké použití, ale na druhou stranu stojí více peněz oproti verzi se základními funkcionalitami. Pravdou je, že jsem ještě nevyužil spoustu funkcionalit tohoto programu, zvláště týkajících se dynamiky.

obrázek 4.2 – Prostředí programu Scia Engineer

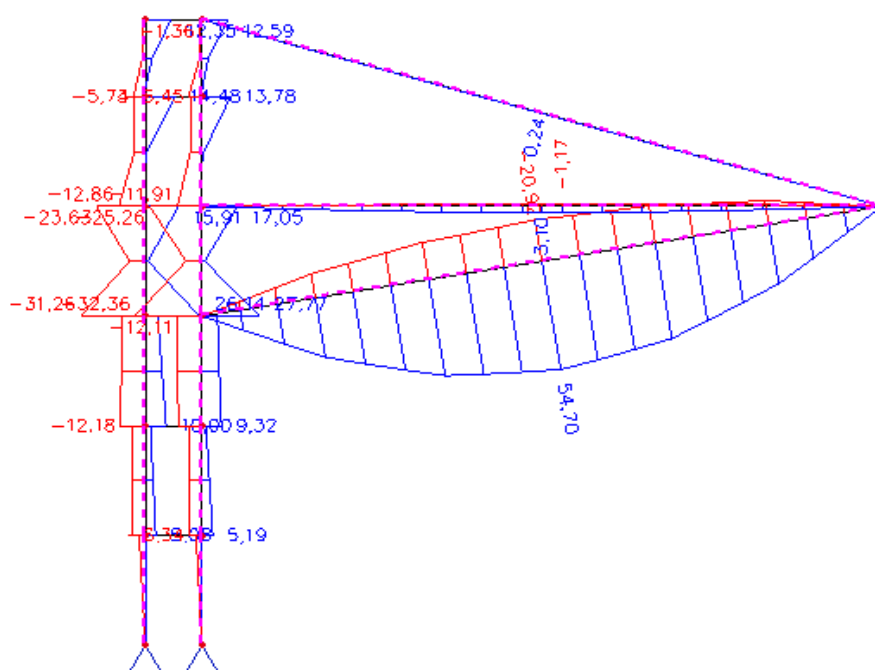


Oba programy se grafikou až na některé části neliší. Oba mají levý panel stromu, vpravo vlastnosti a uprostřed hlavní část pracovní plochy. Dole nechybí ani příkazový řádek (obrázek 4.2). Rozdíl je ve funkcionalitách a v použitých koeficientech z aktuálních

technických norem pro navrhování konstrukcí. Hodně se odlišují při zadávání a úpravách geometrie.

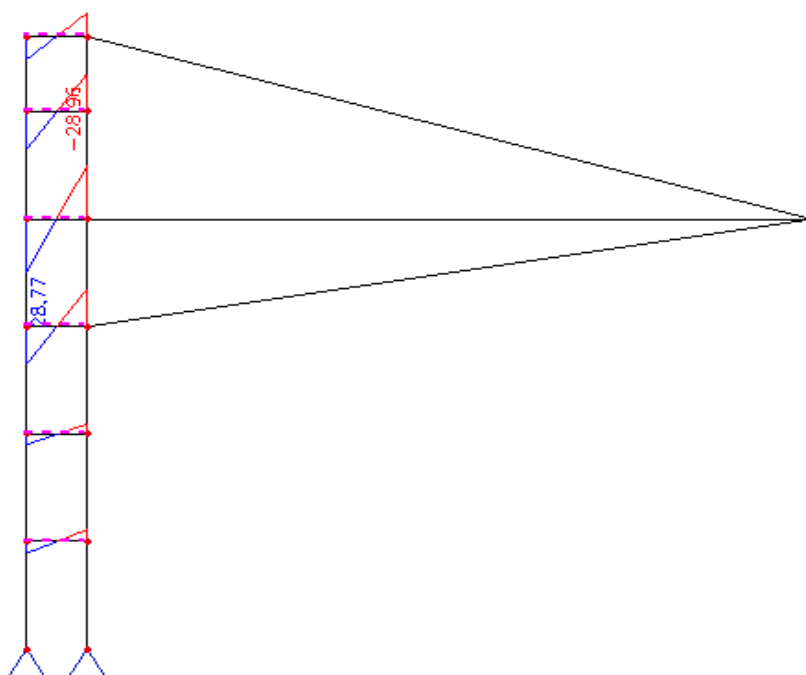
Užitečnou funkcí je zobrazení obalových křivek průběhů vnitřních sil a napětí, ale i zobrazování kritické kombinace. V programu je možnost zadat i prut konstrukčně, což znamená, že se s ním počítat jako se stabilizujícím prvkem při výpočtech stability konstrukce. Řadu možností má také modul dynamika, i když jsem v této oblasti dosud použil jen zjišťování vlastních frekvencí a vlastních tvarů kmitání. Dynamika se uplatní například při výpočtech mostů a lávek.

obrázek 4.3 – Obalové křivky vnitřních sil (ohybový moment)



Bohužel někdy ve stycích prutů bývá změt' čísel, což jde někdy obejít zobrazením jen extrémů na prutu nebo průřezu (obrázek 4.4).

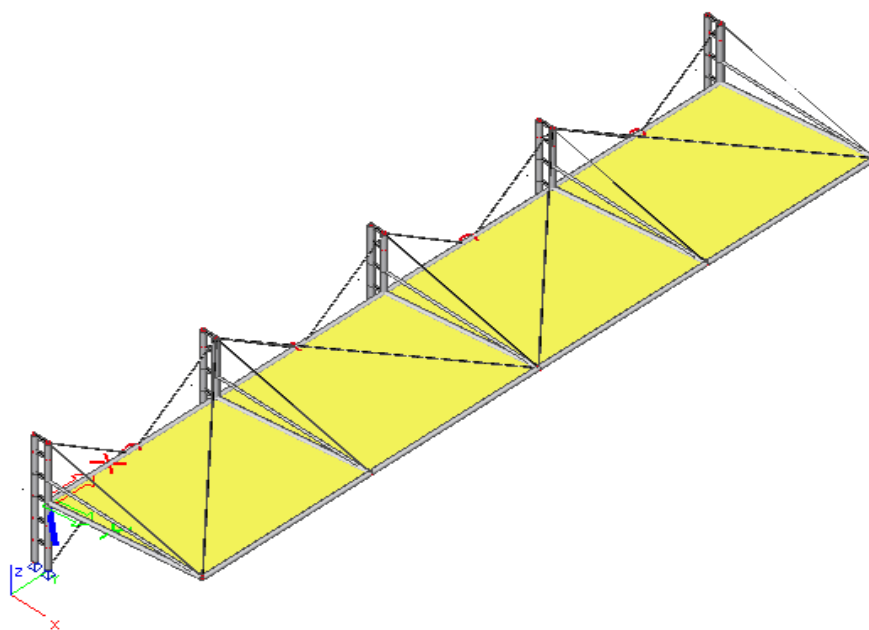
obrázek 4.4 – Obalové křivky ohybového momentu na vybraných prutech



Nejčastěji jsem v tomto programu počítal prutové konstrukce. Zezačátku byla důvodem kontrola výsledků s výsledky ručního výpočtu v příkladech na třímomentovou rovnici a zjednodušené deformační metody. Další příležitost využití programu Scia Engineer byla při ověřování výsledků výpočtu obecnou deformační metodou v Microsoft Excelu.

Nejvíce jsem v tomto programu prováděl výpočty v posledním roce. Za úkol jsme měli namodelovat přístřešek (obrázek 4.5) pro osobní vozidla tak, aby vypadal podobně jak na obrázku v zadání. Sice jsme provedli pár úprav, ale výsledná podoba se příliš nelišila. Střecha měla být z nějaké plachtoviny, a tudíž došlo i na nelineární výpočet a nelineární stabilitu, přičemž plachta střechy byla modelovaná jako membrána. Přitom jsme vyzkoušeli mnohé z funkcí programu.

obrázek 4.5 – vymodelovaný přístřešek pro auta

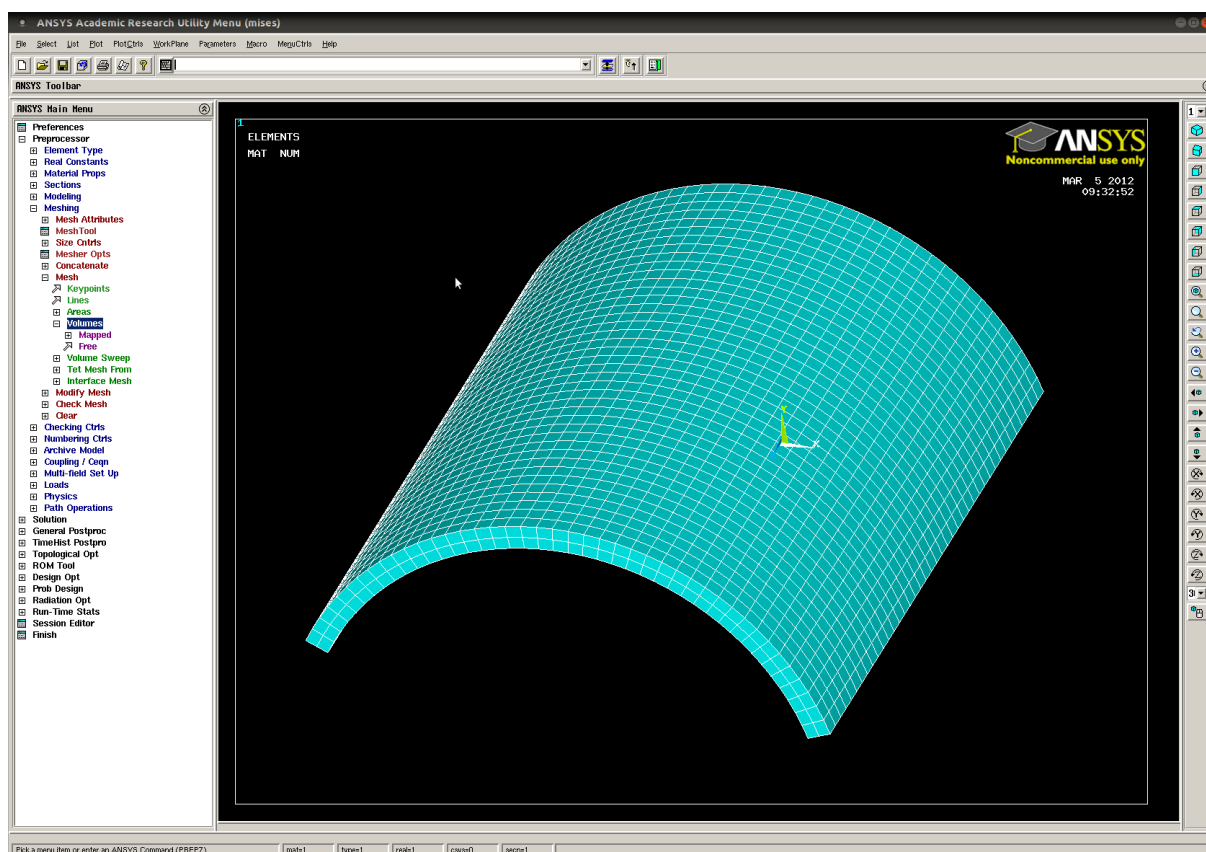


Ovšem co se týká ceny, Scia Engineer patří mezi levnější programy ve své kategorii. Například u programu ANSYS cena startuje na statisících korun. V minulém semestru jsme se zúčastnili přednášky od firmy IDEA RS, která patří mezi novější na trhu a nabízí softwary na statické výpočty konstrukcí. Tato firma se podílela na tvorbě programu Scia Engineer, ale dnes je to již samostatná firma, která chce na trh přijít ne s programem na všechno, ale s levným programem na konkrétní typy úloh, jako jsou desky, stěny, rámy. Dokonce nabízí na internetu online aplikace pro výpočet elementárních úloh (tzv. cloud aplikace), kdy není výpočet prováděn na počítači uživatele, ale ve výkonném výpočetním centru.

#### **4.4. ANSYS**

Tento program vznikl dříve než NEXIS nebo Scia Engineer. Ovšem má větší oblast v řešení úloh, např. stavební mechanika, vedení tepla, proudění kapalin.

obrázek 4.6 – Prostředí programu ANSYS



Ovládání není tak intuitivní jak u programu Scia Engineer, ale na druhou stranu má program předdefinováno několik typů konečných prvků pro zvolený typ řešené úlohy. Uživatel musí projít více záložek při nastavení úlohy, určit rozdělení úlohy na konečné prvky, zvolit si nějaký typ konečného prvku apod. Tato časově delší část je pak vykoupena rychlým řešením úlohy, která je vyšší než u např. programu Scia Engineer.

## **5. Vytvořený program na řešení oblouků**

Praktická část práce je z převažující části program, vytvořený v programovacím jazyku Matlab, verzi R2010a. Program je schopen řešit 2 typy oblouků, kruhové a parabolické (parabola 2° se svislou osou  $y$ ). Program jsem sestavoval tak, aby i uživatel nezkušený v programování, nemusel zasahovat do zdrojového kódu programu.

V této kapitole dále popíšeme uživatelské prostředí, odvodíme geometrické vztahy pro oblouky a seznámíme se se způsobem zavedení metody konečných prvků do programu.

### **5.1. Uživatelské prostředí programu**

Aby i uživatel neznalý programování nemusel hledat místa ve zdrojovém kódu, kam zadat vstupní data, opatřil jsem program uživatelským menu. Uživatel pouze prochází položky menu a zadává vstupní data a zobrazuje výsledky.

Program se skládá z jednoho hlavního programu, ve kterém jsou vyvolávány různé podfunkce podle aktuální činnosti hlavního programu. Program využívá 41 podfunkcí. Program je sestaven tak, že se spustí hlavní program v editoru a pak se vše odehrává v příkazovém okně (viz obr. 5.1).

obrázek 5.1 – Uživatelské prostředí vytvořeného programu

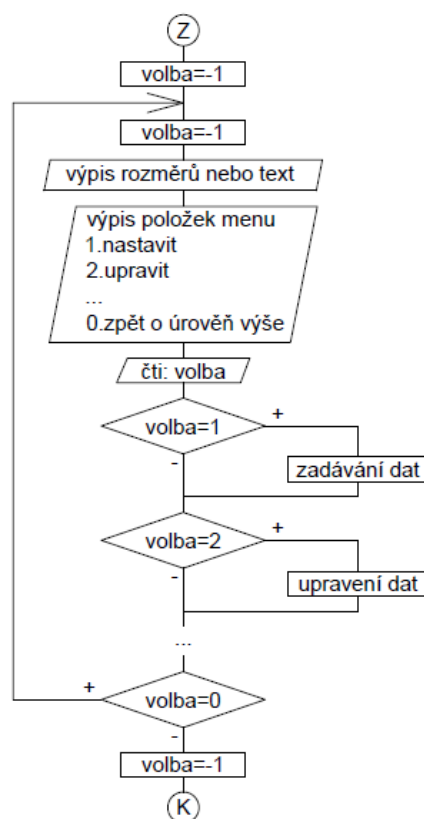
```
ROZMĚRY OBLOUKU
-----
Oblouk - rozpětí:          10.00 m
        - rozdíl výšky podpor: 2.00 m (pravý konec výše)
        - poloměr:          5.50 m
        - vzepětí:          3.99 m

Průřez - výška: 0.200 m
        - šířka: 0.400 m

2.UPRAVIT ROZMĚRY OBLOUKU
4.UPRAVIT ROZMĚRY PRŮŘEZU
5.SMAZAT ROZMĚRY OBLOUKU
0.ZPĚT DO MENU GEOMETRIE
-----
volba:|
```

Takové podoby menu docílíme použitím jednoduchého algoritmu (obrázek 5.2). Z hlediska programování se jedná o cyklus s neznámým počtem opakování, kde o opakování rozhoduje proměnná *volba*. Na začátku je do této proměnné vložena hodnota rozdílná od nuly. Protože se uživatel může do této části menu několikrát vrátit, je totéž provedeno po jejím opuštění.

obrázek 5.2 – Algoritmus elementární části uživatelského menu



Název elementární část volíme proto, že se tento algoritmus opakuje ve všech částech menu. Zadávání nebo upravení dat nemusí být jen prostá záměna hodnot v proměnných, ale i další položka menu s podobným algoritmem. Část *výpis rozměrů nebo text* se nemusí v algoritmu nutně vyskytovat, záleží na konkrétní části menu. I v různých částech menu nemusí být stejné položky, například u výsledků nezadááme data, ale zobrazujeme napětí, deformace apod.

Na konci, když chce uživatel program ukončit, je od spuštění programu v hlavním menu položka konec, kterou se program ukončí a do proměnných se nahrají všechna data ze zadávání, výpočtů a výsledků. Pro odbornější uživatele, kteří by chtěli dále data využít je možnost si je uložit pomocí příkazu *save* v příkazovém okně. Zdrojový kód programu je připojen v příloze 1.

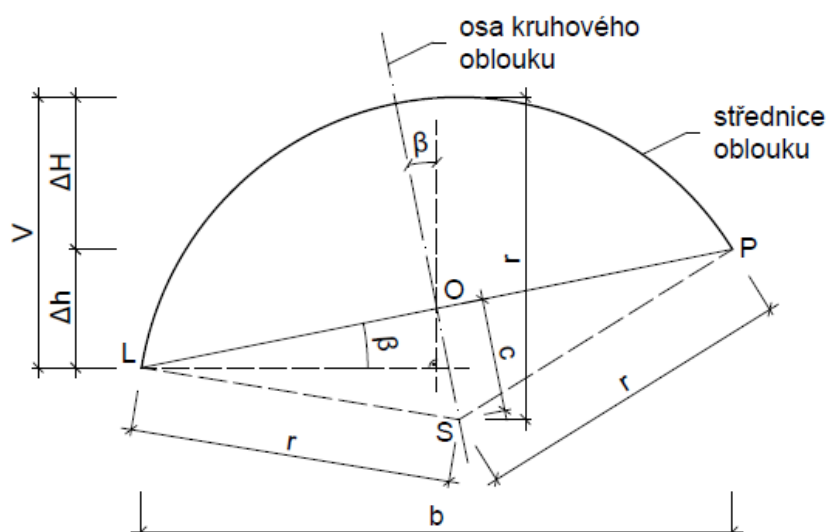
## 5.2. Geometrie oblouků

Do programu zařazujeme generátory sítě uzlů pro 2 typy oblouků, kruhové a parabolické (2°). V této podkapitole je obecně popsán výpočet některých rozměrů, protože zadávání geometrie oblouků je uživatelsky variabilní.

Oblouky jsou obecně odvozeny pro oblouky s konci různé výšky. Do programu jsem zavedl i možnost zadat oblouky vzepětím, kdy se v podfunkci dopočítává poloměr kruhového nebo parametr střednice parabolického oblouku. Výpočty neznámých parametrů probíhají v podfunkcích, jejichž zdrojový kód je možno nalézt v příloze 1.

### 5.2.1. Kruhové oblouky

obrázek 5.3 – Geometrie kruhových oblouků



Jedním ze základních parametrů kruhových oblouků je poloměr. Zadávání oblouku pomocí poloměru nevyžaduje složitější výpočet. Postačí nám Pythagorova věta a goniometrické funkce. Začneme s rozměry, které lze přímo dopočítat z rozpětí  $b$  a rozdílu výšky konců  $\Delta h$ .

$$d = \sqrt{b^2 + \Delta h^2} \quad (69)$$



$$c = \sqrt{r^2 - \frac{d^2}{2}} \quad (70)$$

Délka úsečky LP  $d$  a vzdálenost středu od úsečky LP  $c$  nám poslouží pro výpočet pro výpočet úhlů  $\alpha$ ,  $\beta$  a vzepětí oblouku  $V$ . Úhel  $\alpha$ , který není na obrázku vyznačen je úhel  $\angle OLS$  a taktéž  $\angle OPS$ .

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{d}{2r}\right) \quad (71)$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{\Delta h}{b}\right) \quad (72)$$

Rozdíl výšky  $\Delta h_2$  středu  $S$  a vyššího konce oblouku  $P$  dopočteme ze znalosti poloměru  $r$  a vypočtených úhlů  $\alpha$  a  $\beta$ . Když známe poloměr  $r$  a  $\Delta h_2$ , snadno dopočteme vzepětí od vyššího konce oblouku  $\Delta H$ .

$$\Delta h_2 = r * \sin(\alpha + \beta) \quad (73)$$

$$\Delta H = r - \Delta h_2 \quad (74)$$

$$V = \Delta H + \Delta h \quad (75)$$

Nyní známe vstupní data  $b$ ,  $\Delta h$ ,  $r$  a také vypočtené  $\Delta H$ ,  $\Delta h_2$ . Vzepětí  $V$  do nižšího konce  $L$  dopočteme jako součet  $\Delta h$  a  $\Delta H$  (74). Tyto výpočty probíhají v podfunkci *KOR*.

Pokud by měly být rozměry oblouku, zejména jeho vzepětí voleny podle potřebného prostoru pod obloukem, nemusí uživatel dopočítávat vzepětí ručně, ale může využít možnost přímo zadat vzepětí oblouku a poloměr si dopočte program sám. Poněvadž jsou neznámé 2 parametry  $r$  a  $V$  v 1 rovnici, používáme iterační výpočet.

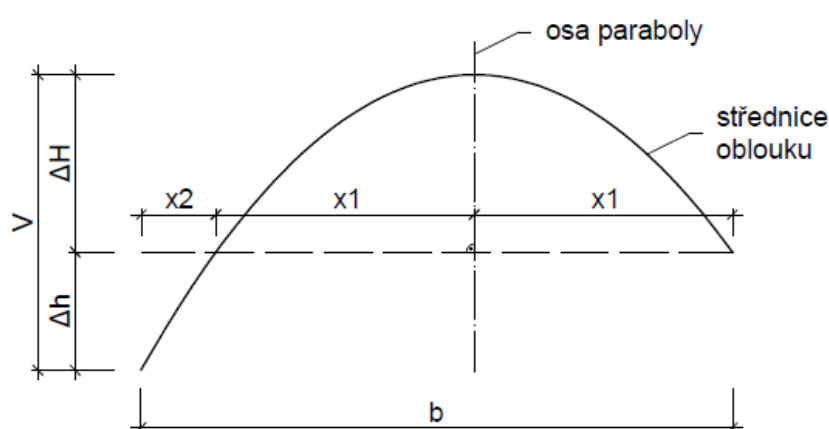
Prvně jsme začali zvětšovat poloměr z jeho nejmenší možné hodnoty  $d/2$  do té doby, až bude vyhovovat vzepětí. Výpočet trval příliš dlouho a tak jsme přešli od zvyšování poloměru ke zvolení nejčastější hodnoty a pak upravováním jeho velikosti vždy o polovinu změny poloměru v předchozím kroku iterace (tzv. půlení intervalu). Rychlost přibližování vzepětí

radikálně vzrostla a výsledek obdržíme prakticky ihned. V každém iteračním kroku používáme vtahy (70), (75) a (76). Iterační výpočet probíhá v podfunkci *KOV*.

$$\Delta H = r - c_x - \frac{\Delta h}{2} \quad (76)$$

### 5.2.2. Parabolické oblouky

obrázek 5.4 – Geometrie parabolických (2°) oblouků



U parabolických oblouků je vyjádření vztahů pro výpočet neznámých parametrů geometrie oblouku snazší. U tohoto typu oblouku považujeme osu paraboly za svislou, a proto nepočítáme s náklonem osy, jak to je u kruhových oblouků (viz kap 5.2.1.). Na druhou stranu není toto vyjádření ani příliš jednoduché.

Začneme s vyjádřením vztahů pro oblouk zadaný rozpětím  $b$ , rozdílem výšky podpor  $\Delta h$  a parametrem střednice paraboly  $a$ . Nejdříve jsme odvodili rovnici (77), ve které vystupují 2 neznámé parametry  $x_1$  a  $x_2$ .  $X_1$  a  $X_2$  vystupující v (77) jsou rozdíly x-ových souřadnic konců oblouku a osy paraboly.

$$a * X_1^2 = a * X_2^2 + \Delta h \quad (77)$$

Po přidání rovnice (78) vzniká soustava 2 rovnic o 2 neznámých, kterou řešíme substitucí jedné neznámé vyjádřením z rovnice (78) a dosazením substitucí do rovnice (77).

$$X_1 + X_2 = b \quad (78)$$

Po vyřešení soustavy rovnic (77,78) dostáváme vztah (79) vyjadřující velikost  $x_1$  v závislosti na  $a$ ,  $b$  a  $\Delta h$ .  $x_2$  dostaneme odečtením dvojnásobku  $x_1$  od  $b$  (80). Nyní známe parametr střednice  $a$  a rozměr  $x_1$ , a tak vzepětí  $\Delta H$  od vyššího konce vyjádříme vztahem (81). Vzepětí  $V$  dostaneme z (75).

$$x_1 = \frac{b^2 - \frac{\Delta h}{a}}{2b} \quad (79)$$

$$x_2 = b - 2x_1 \quad (80)$$

$$\Delta H = a * x_1^2 \quad (81)$$

U parabolického oblouků zadaných rozpětím  $b$ , rozdílem výšky podpor  $\Delta h$  a vzepětím  $V$  je opět nutné provést iterační výpočet.

Nyní máme 2 neznámé parametry  $x_1$  a  $a$ . Na začátku zvolíme  $x_1=b/2$  a pak v iteračním výpočtu využijeme tzv. půlení intervalů (popsané v kap. 5.2.1.). V každé iteraci porovnáme výšku nižšího konce oblouku (83) se zadaným vzepětím, a pak buď zvýšíme, nebo snížíme  $x_1$  a tím i parametr střednice oblouku (82).

$$a = \frac{\Delta H}{x_1} \quad (82)$$

$$V = a(x_1 + x_2)^2 \quad (83)$$

Půlení intervalu velmi zrychlí výpočet oproti postupnému zmenšování  $x_1$ . Tímto zakončíme odvozování vztahů pro geometrii oblouků a přejdeme k zavedení metody konečných prvků do programu.

### **5.3. Aplikace metody konečných prvků ve vytvořeném programu**

V této podkapitole popisujeme aplikaci metody konečných prvků ve vytvořeném programu. Aby byl popis zřejmý, rozdělujeme tuto podkapitolu na několik částí. Začneme s generátory uzlů sítě konečných prvků, poté přejdeme ke kódovým číslům, matici tuhosti, okrajovým

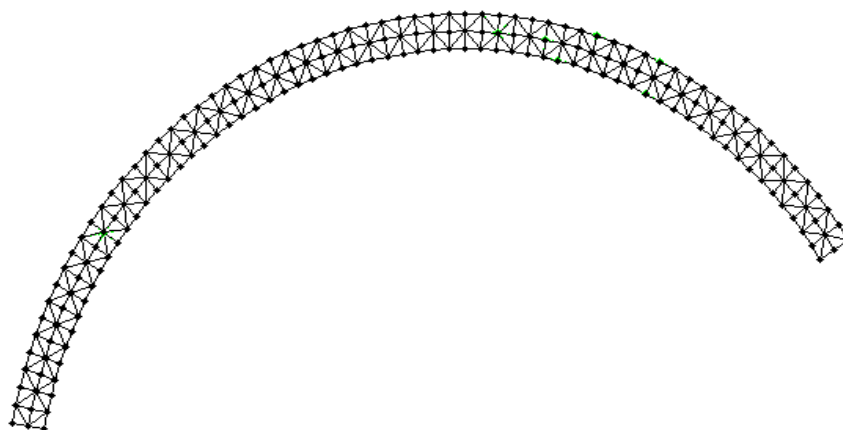
podmínkám, zatížení, podmínce plasticity a také k Newton-Raphsonově metodě. Zmíníme se také o škále dostupných výsledků pro výpočet ve vytvořeném programu.

### 5.3.1. Generátory uzlů sítě konečných prvků

Při spuštění pružného výpočtu přicházejí na řadu nejprve generátory uzlů sítě. Uživatelsky lze zadat počet konečných prvků na výšku profilu (přednastavená hodnota je 2), ale nedoporučuji zadávat 1 prvek, protože u výsledků pak klesá přesnost. Na druhou stranu příliš vysoký počet zvětší složitost sítě a prodlouží výpočet, a navíc by mohlo dojít ke kolizi v podobě překrývajících se prvků. Na obrázku by pak nešla vidět barevná škála přes spoustu čar ohraničujících jednotlivé konečné prvky.

V předchozím odstavci jsme se zmínili o výšce prvku. Nyní přejdeme k délce konečného prvku, kterou se snažíme volit podobnou jeho výšce. Podrobný popis, jak se generují uzly sítě konečných prvků, zde nebudeme více rozepisovat, ale čtenáři si ho mohou najít ve zdrojovém kódu podfunkcí *UKO* a *UPO* (příloha 1). Výsledkem může být například tato síť konečných prvků. Jedná se kruhový oblouk s vetknutými konci.

obrázek 5.5 – Síť konečných prvků kruhového oblouku



### 5.3.2. Kódová čísla uzlů

U kódových čísel uzlů je vysvětlení jednoduché. Protože řešíme rovinnou úlohu, každý uzel má 2 kódová čísla, 1 pro horizontální posun  $u$  a 1 pro vertikální posun  $v$ . Na začátku jsme si zvolili směr číslování uzlů zleva doprava od nejvyšší po nejnižší řadu uzlů. K tomu nám

poslouží matice čísel uzlů *PCU* (pomocná čísla uzlů). Pro potřeby programu převádíme kódová čísla do dvou sloupcové matice *KC* (kódová čísla) s počtem řádků rovným počtu uzlů. Dále v programu využíváme matici *KCP* (kódová čísla prvků) se šesti sloupci a počtem řádků rovným počtu konečných prvků, zejména pro tvorbu matice tuhosti konstrukce.

### 5.3.3. Matice tuhosti a okrajové podmínky

Matice tuhosti konečných prvků je generována automaticky pro každý prvek jednotlivě. Postup odvození je popsán v kap. 3.1.1., takže ho zde nebudeme opět uvádět, ale využijeme vztahy (63), (64) a předchozí.

Bez okrajových podmínek nemůžeme konstrukci řešit. Do programu jsem zavedl 4 možné podepření konce oblouku, a to vetknutí, vertikálně neposuvný kloub, horizontálně neposuvný kloub a vertikálně i horizontálně neposuvný kloub. U vetknutí zamezíme všem uzlům na konci oblouku horizontální i vertikální posun.

U kloubových uložení zamezíme posuny pouze 1 uzlu, čímž skutečně vzniká čistý kloub, ale dochází i k lokálním extrémům napětí. Proto v případě kloubového uložení zesilujeme krajní sloupec konečných prvků 50tinásobně. K tomu nám pomáhá výše zmíněná matice *PCU*.

### 5.3.4. Zatížení

Do programu jsem zavedl zatížení osamělou silou nebo spojitým zatížením na horizontální průmět. U každé síly je možné uživatelsky nastavit její velikost, s-ovou souřadnici působíště a její sklon. Obdobně je tomu i u spojitého zatížení, ale působíště nahrazujeme levým a pravým koncem spojitého zatížení v podobě x-ových souřadnic.

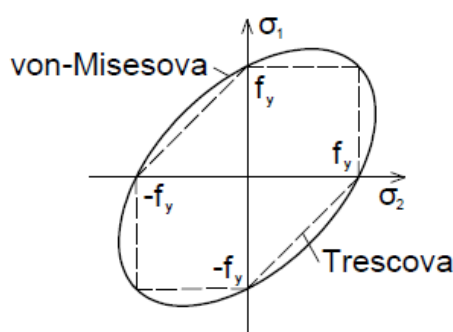
U osamělých sil i spojitých zatížení je možno si vybrat, zda budou působit na horním či dolním povrchu oblouku. Zatížení vlastní tíhou se zadává pomocí objemové hmotnosti a program si dopočítá z šířky průřezu a plochy konečného prvky zatížení do uzlů sítě.

Program se sám postará prostřednictvím podfunkcí ZAT\_SILY a TRANS\_SPOZ\_OSF o vytvoření zatěžovacího vektoru.

### 5.3.5. Podmínka plasticity, Newton-Raphsonova metoda

Pro pružnoplastické výpočty zavádíme podmínku plasticity. Pro ocel je vhodná von-Misesova (85), pro dřevo Hillova a pro beton Trescova. Rozhodl jsem se do výpočtu zavést von-Misesovu podmínku plasticity, protože používám geometrické rovnice pro izotropní materiál. Uživatelsky je možno měnit mez kluzu materiálu, Youngův modul pružnosti v pružném i plastickém stavu, takže do programu můžeme zavést jakýkoliv izotropní materiál, i když v reálných situacích nikdy izotropie nelze dosáhnout.

obrázek 5.6 – Podmínky plasticity



$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}} \quad (84)$$

$$\sigma_{VM} - f_y = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}} - f_y = 0 \quad (85)$$

Pružnoplastický výpočet provádíme Newton-Raphsonovou metodou (kap. 2.4.), přičemž nultý zatěžovací krok je tvořen 95%ní velikostí zatížení způsobujícího globální maximum napětí na mezi kluzu materiálu. Zbývající část zatížení rozdělujeme na zvolený počet zatěžovacích kroků.

#### **5.4. Ovládání programu**

V této kapitole popisujeme, jak ovládat vytvořený program. Nejprve popíšeme zadávání, pak výpočet a nakonec výsledky, přičemž každou část trochu rozvedeme.

Zadávání geometrie provádíme 1. položkou v hlavním menu. Nejdříve je nutno vybrat typ oblouku z 2 možností (kruhový, parabolický), a pak se teprve zpřístupní zadávání geometrických dat oblouku (rozpětí, vzepětí, rozměry průřezu). Na začátku máme přednastavené uložení obou konců oblouku jako vetknutí a můžeme ho změnit na kloubové uložení.

V 2. položce hlavního menu se zadávají mechanické vlastnosti materiálů, jako mez kluzu, modul pružnosti a Poissonův součinitel.

Zatížení zadáváme 3. položkou v hlavním menu. Oblouk je možno zatěžovat osamělými silami, spojitými zatíženími (na horizontální průmět) a vlastní tíhou materiálu oblouku. V menu je přehledný výpis všech sil a spojitých zatížení, které jdou zároveň i editovat.

4. položku nazýváme nastavení řešiče po vzoru programu Scia Engineer. V této položce najdeme nastavení dělení na konečné prvky, násobitele deformací pro zobrazování výsledků, počet zatěžovacích kroků pružnoplastického výpočtu a zastavovací podmínku iterace v zatěžovacím kroku v podobě omezení velikosti maximální deformace.

V 5. položce najdeme výpočet a v 6. položce jeho výsledky. Výsledky pružného výpočtu jsou dostupné ve formě deformací sítě konečných prvků, napětí na oblouku, maximální svislé deformaci. U pružnoplastického výpočtu přibývá zplastizovaná oblast a průběh zatěžování se zobrazováním napětí nebo plastikace oblouku.

Pro ukončení práce v programu zvolíme v hlavním menu položku poslední konec a vyjdeme z programu. Data z programu, jako jsou matice napětí apod., si můžeme uložit buď přímo v Matlabu, nebo přes editor proměnné i do Microsoft Excelu.

## **6. Srovnání výsledků**

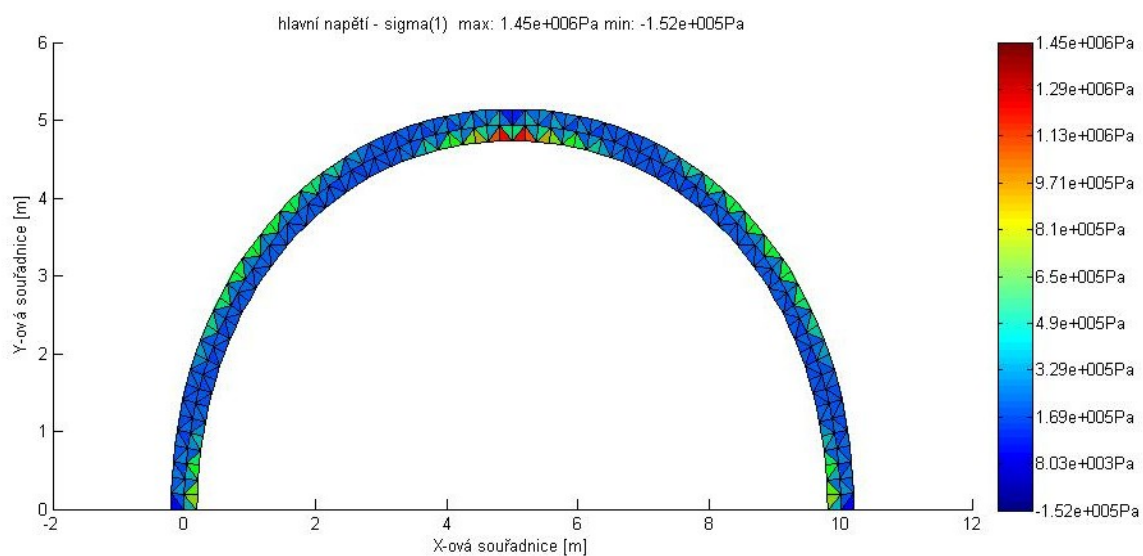
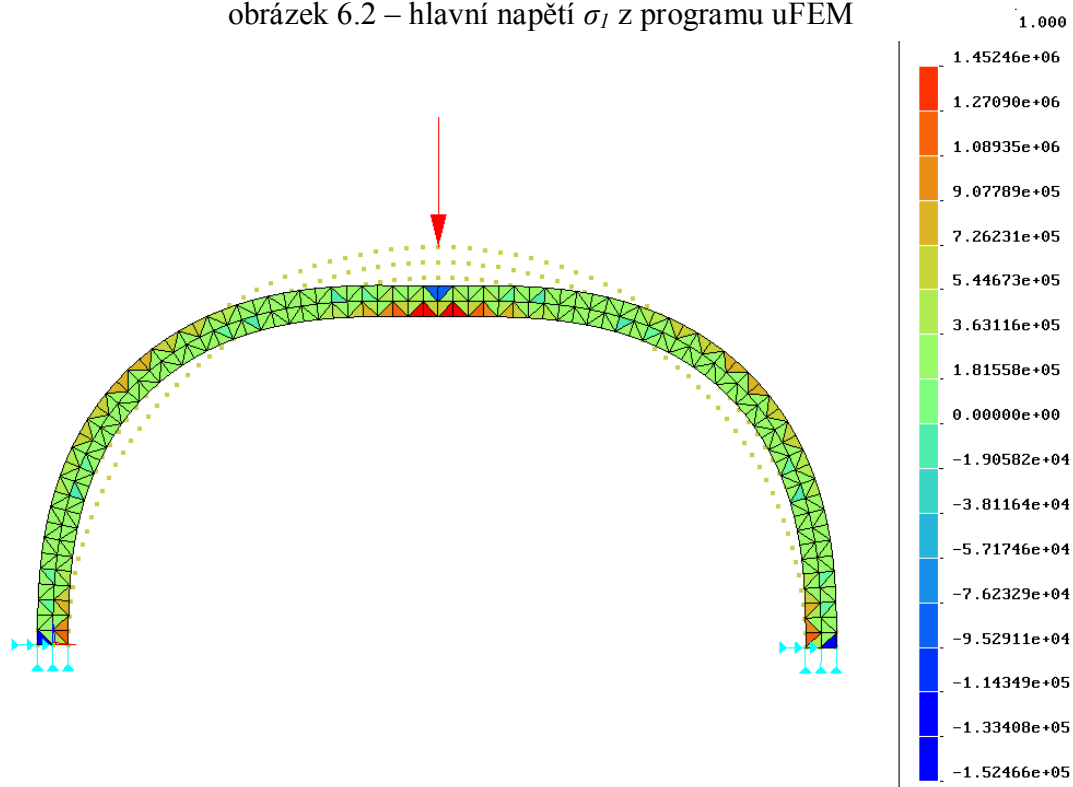
V této kapitole nejdříve srovnáváme výsledky z vytvořeného programu s výsledky s programy uFEM a Scia Engineer. Jako příklad, na kterém ověřujeme získané výsledky, volíme půlkruhový oblouk, který lze snadno namodelovat v běžných softwarech pro řešení rovinných úloh. Poté porovnáme závislost výsledků na hustotě dělení sítě konečných prvků na dalších příkladech.

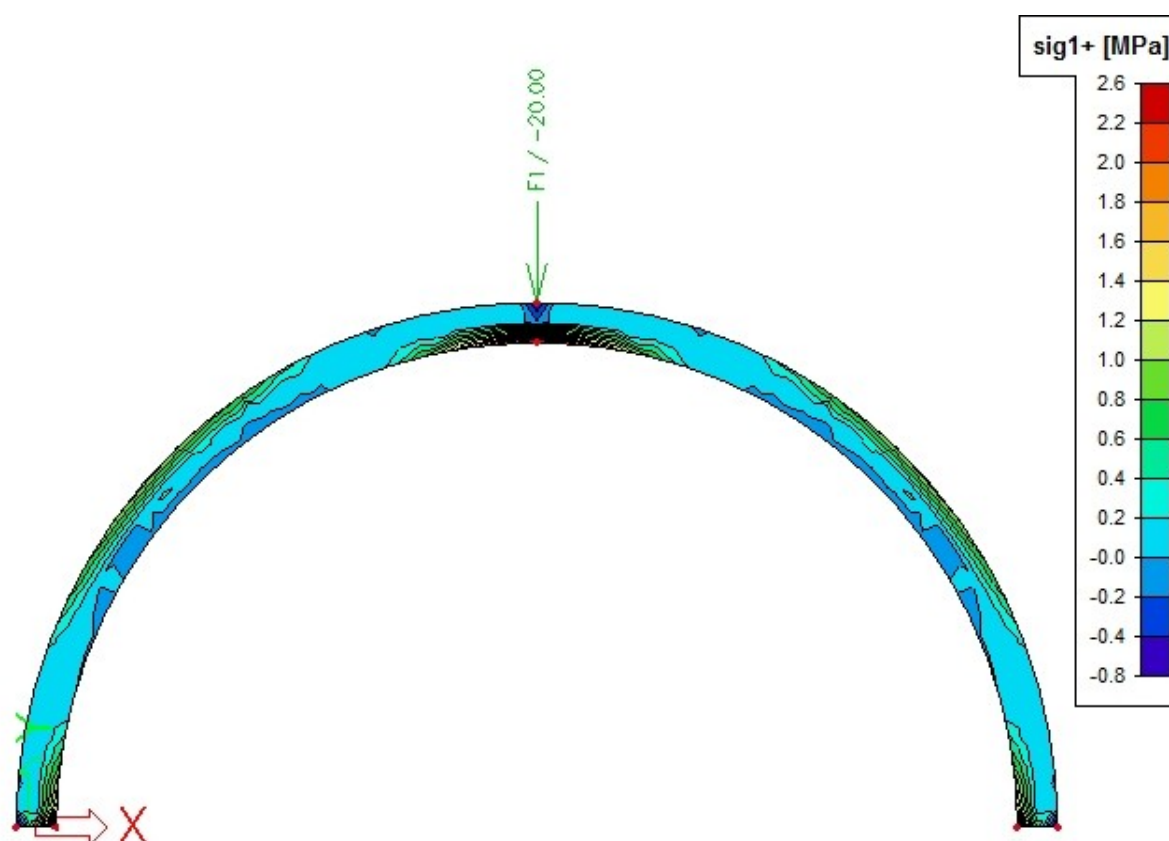
### **6.1. Verifikace výsledků softwaru s programy uFEM a Scia Engineer**

Jako příklad pro ověření volíme půlkruhový oblouk s rozměry průřezu 200x400mm. V programu Scia Engineer jsme zvolili beton C20/25 s modulem pružnosti 30GPa a Poissonovým součinitelem  $\nu=0,2$ . Tyto parametry materiálu vkládáme do programu uFEM i vytvořeného programu. Oblouk zatěžujeme na uprostřed rozpětí svislou silou o velikosti 20kN působící směrem dolů na horním povrchu průřezu.

Nejprve porovnááme výsledky z vytvořeného programu s výsledky programu uFEM, protože používáme stejnou síť uzlů a stejné konečné prvky. Ověření provádíme na pružném (lineárním) výpočtu.



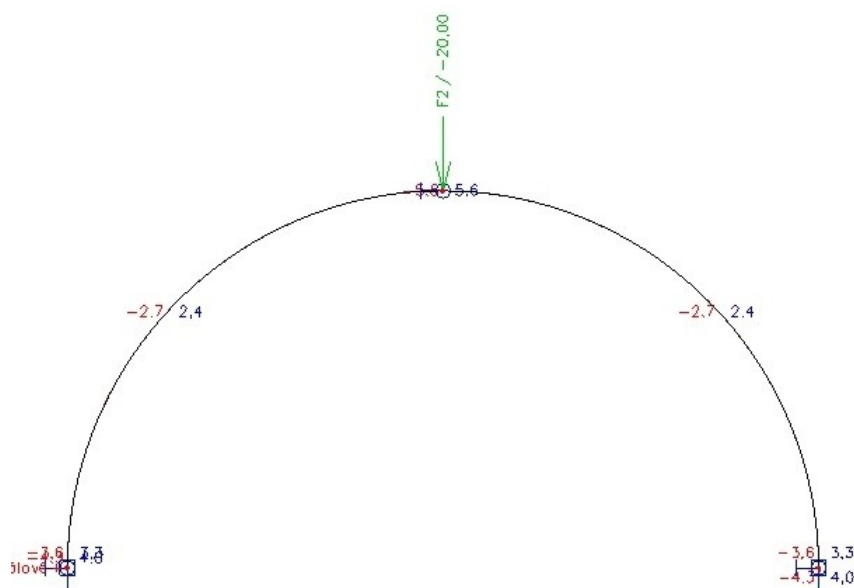
obrázek 6.1 – hlavní napětí  $\sigma_I$  na ověřovacím příkladuobrázek 6.2 – hlavní napětí  $\sigma_I$  z programu uFEM

obrázek 6.3 – hlavní napětí  $\sigma_I$  z programu Scia Engineer

Na tomto příkladu jsme dokázali, že vytvořený program dává věrohodné výsledky. Rozdíl výsledků u programu Scia Engineer, je způsoben vyhlazením napětí a použitím složitějších konečných prvků a také jiné sítě uzlů. Obdobně je tomu i u dalších napětí, nicméně výstupem je větší škála výsledků.

## **6.2. Přesnost výsledků a hustota sítě konečných prvků**

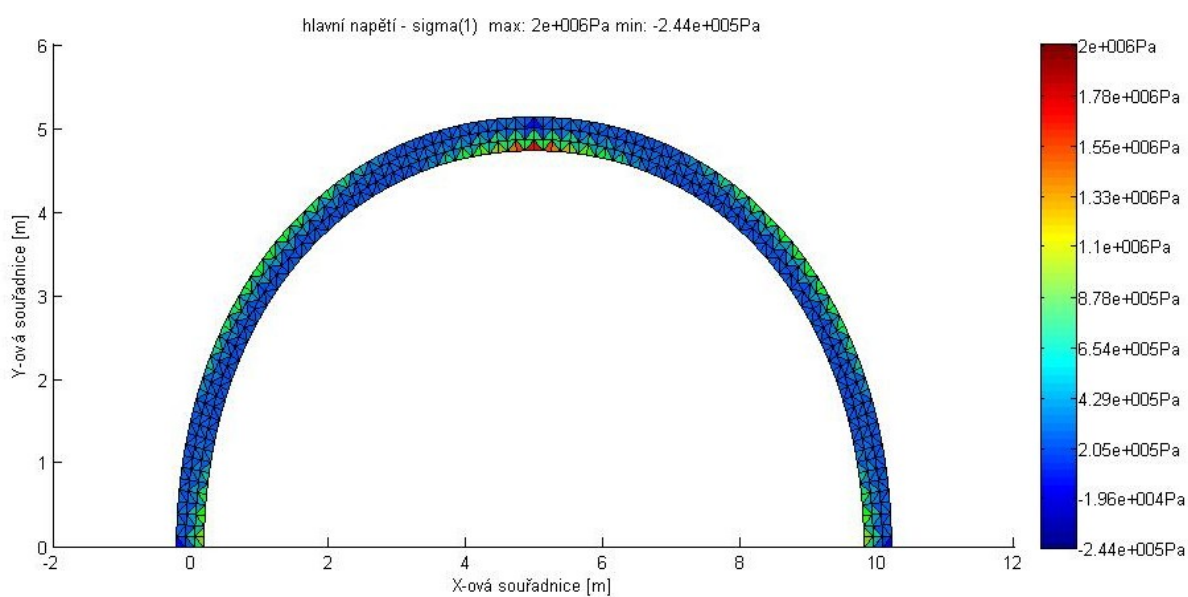
Na dalších řešených příkladech použijeme různé hustoty dělení sítě konečných prvků. Začneme se srovnáním výsledků výpočtu pomocí plošných konečných prvků a poté budeme měnit hustotu sítě konečných prvků na ověřovacím příkladu.

obrázek 6.4 – napětí  $\sigma$  na prutovém modelu oblouku (Scia Engineer)

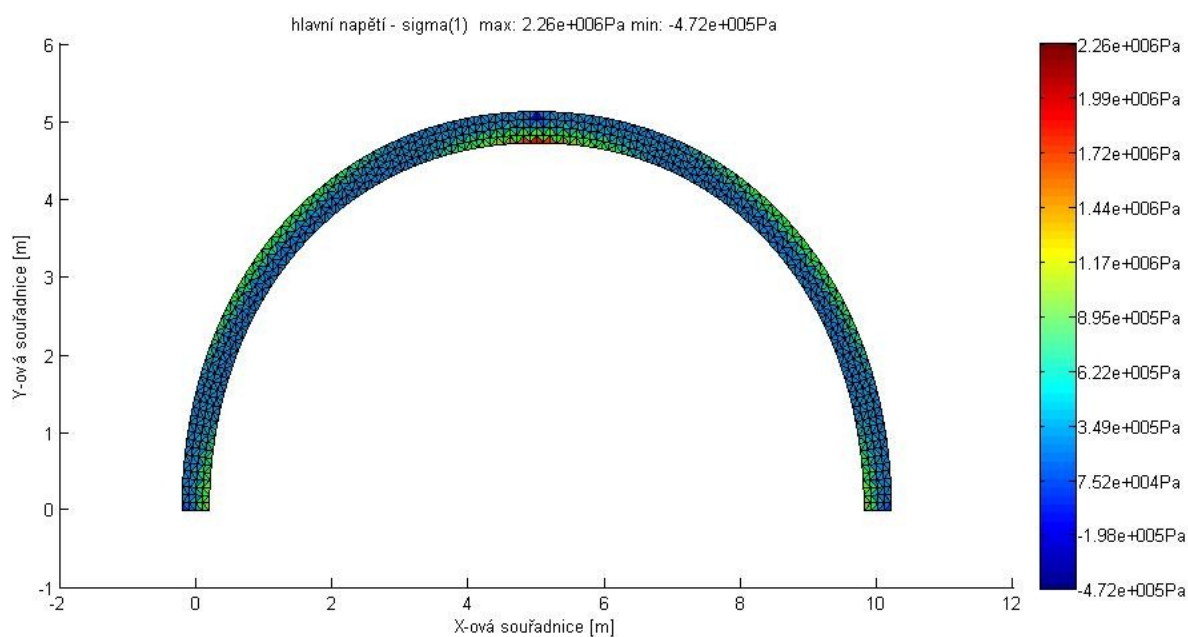
Hlavní napětí na prutu nejsou prakticky ovlivněna smykem, a proto můžeme vidět podobnost normálového napětí (obr. 6.4) s hlavním napětím (obr. 6.3) na plošném modelu.

Nyní vyzkoušíme, jak se budou měnit extrémy napětí při změně hustoty sítě. Při zhušťování sítě se sice přibližujeme ke skutečným výsledkům, ale rostou i špičky napětí v rozích a poblíž otvorů.

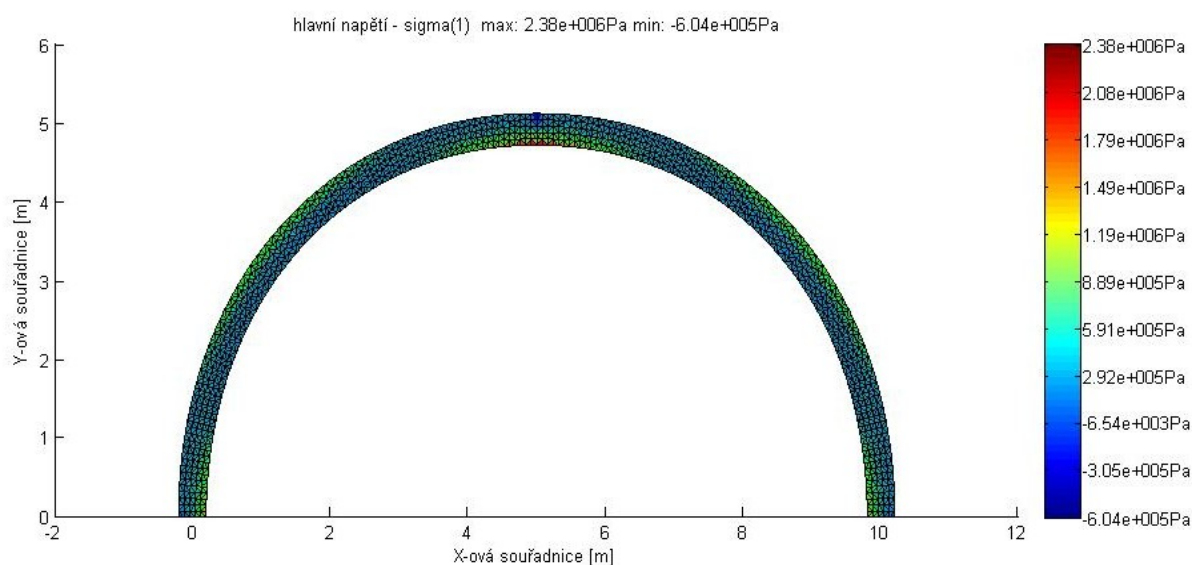
Začínáme na 2 konečných prvcích na výšku profilu oblouku (obr. 6.1). Dále postupně zvyšujeme počet prvků na výšku profilu.

obrázek 6.5 – hlavní napětí  $\sigma_I$  při 3 prvcích na výšku průřezu

Jak můžeme vidět, vzrostly oba extrémní napětí a přibližujeme se hodnotám z programu Scia Engineer.

obrázek 6.6 – hlavní napětí  $\sigma_I$  při 4 prvcích na výšku průřezu

Zatímco maximum vzrostlo jen o 0,2MPa, minimum roste mnohem rychleji (o dvojnásobek oproti předchozímu obrázku).

obrázek 6.7 – hlavní napětí  $\sigma_I$  při 5 prvcích na výšku průřezu

Už se přibližujeme hodnotě maxima z výpočtu v programu Scia Engineer, protože se změny jeho hodnoty začíná zmenšovat. Na druhé straně ale roste minimum a to vlivem lokálního zatížení. Z obrázku už přestávají být viditelné velikosti napětí (vybarvení konečných prvků) přes hranice jednotlivých konečných prvků. Protože výše nejsou zobrazena všechna napětí, uvádíme jejich přehled v následující tabulce.

tab. 6.1 - Přehled napětí při různé hustotě sítě konečných prvků

počet prvků na výšku průřezu	$\sigma_1$		$\sigma_2$		$\sigma_{vm}$	
	min [MPa]	max [MPa]	min [MPa]	max [MPa]	min [MPa]	max [MPa]
1	0,0024	0,547	-0,881	-0,0262	0,0342	0,984
2	-0,1520	1,450	-1,710	-0,0158	0,0868	1,670
3	-0,2440	2,000	-2,230	0,0541	0,0213	2,230
4	-0,4720	2,260	-2,560	0,0903	0,0138	2,530
5	-0,6040	2,380	-2,790	0,1010	0,0102	2,540

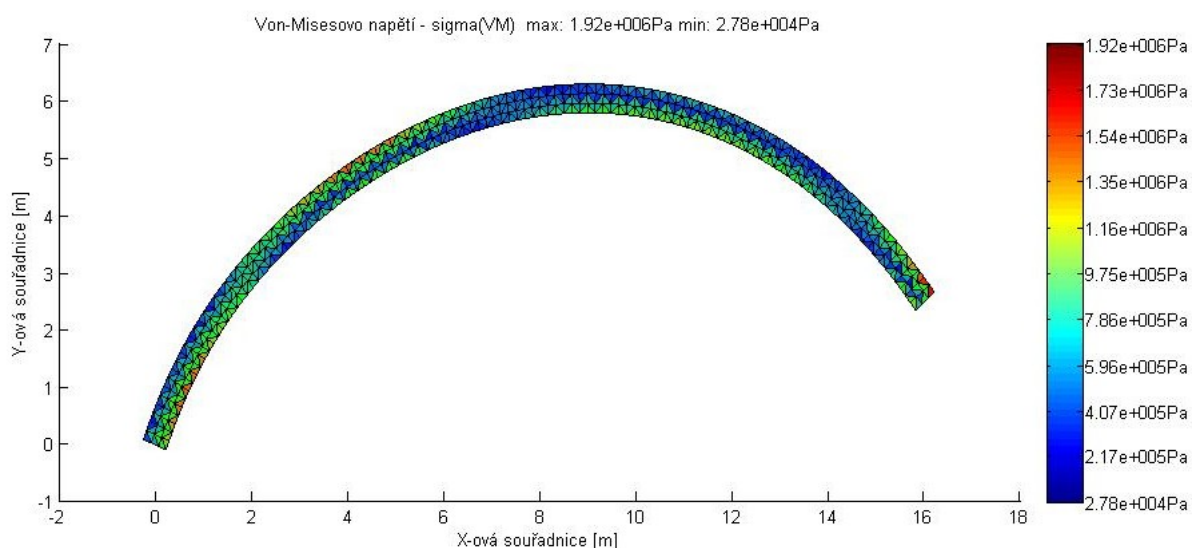
### **6.3. Porovnání kruhového a parabolického oblouku**

Nyní přejdeme k příkladům, kde budeme zadávat oblouk vzepětím. U těchto příkladů nepotřebujeme znát poloměr nebo parametr paraboly, ale postačí nám znát geometrii konců oblouku a požadované vzepětí.

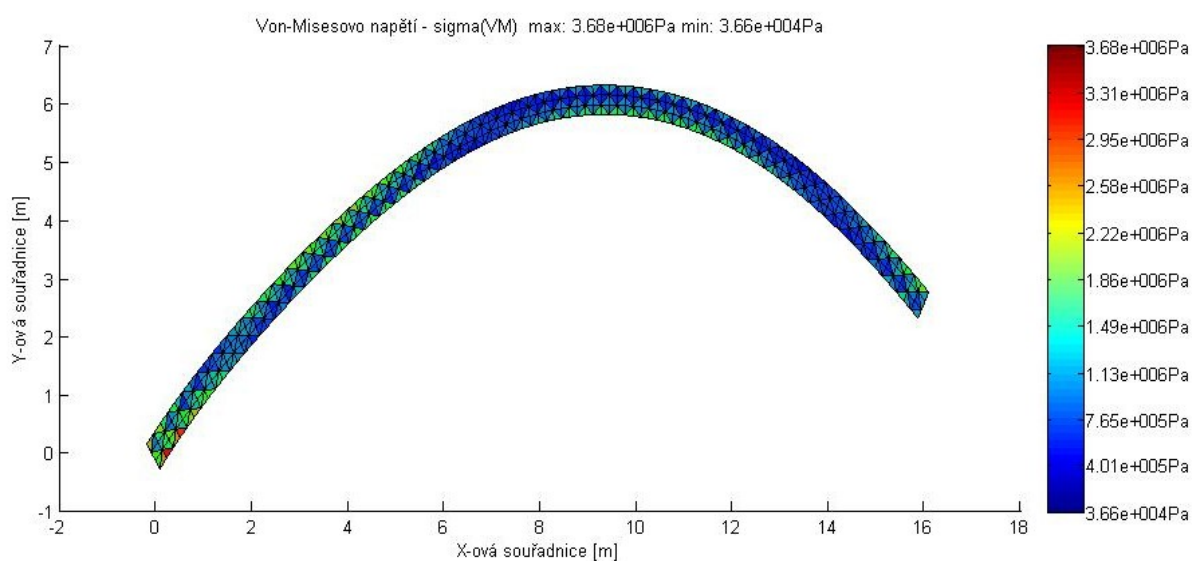
Například mějme rozpětí 16m, rozdíl výšky podpor 2,5m (1 podlaží) a vzepětí 6m od nižšího (levého) konce oblouku. Průřez oblouku má rozměry 250x500mm a materiálové charakteristiky ponecháme z předchozího příkladu. Oblouk zatížíme i vlastní tíhou 25kN/m<sup>3</sup>. Navíc bude celý oblouk zatížen rovnoměrným spojitým zatížením 10kN/m na horizontální průmět. Oba konce jsou vetknuté.

Začneme s kruhovým obloukem. Program vypočetl při poloměru 9,32m vzepětí 6,01m. Když uvažujeme počátek soustavy souřadnice, střed oblouku má souřadnice [8,71; -3,32]. Von-Misesovo napětí pak vypadá pro dané zatížení následovně (deformace  $\times 100$ ).

obrázek 6.8 – porovnání oblouků – kruhový oblouk – napětí  $\sigma_{vm}$



Maximální vznikající tahové napětí se pohybuje kolem 2MPa, což je pevnost v tahu  $f_{ctm}$  u této třídy betonu. Při třídě betonu C30/37 by už oblouk vyhověl na MSÚ i z nevyztuženého betonu. Podívejme se, jak to bude u parabolického oblouku (deformace  $\times 100$ ).

obrázek 6.9 – porovnání oblouků – parabolický oblouk – napětí  $\sigma_{vm}$ 

V příkladu používáme pro beton nepříliš vhodnou von-Misesovu podmínku plasticity. Na parabolickém oblouku vzniká až dvojnásobné von-Misesovo napětí, takže vhodnější je v tomto případě kruhový oblouk.

## **7. Závěr**

Byl vytvořen program na výpočet deformací a napětí na kruhových a parabolických obloucích metodou konečných prvků opatřený uživatelským prostředím. Program je vybaven pružným i pružnoplastickým výpočtem a se skládá z 1 hlavního programu a 31 podfunkcí, které se starají o dílčí výpočty. V programu jsou použity plošné trojúhelníkové prvky s lineární aproximační funkcí. V teoretické části uvádíme vztahy z odvození tohoto konečného prvku.

Výsledky výpočtu byly ověřeny v programu uFEM a srovnány i s výsledky z běžně užívaného programu Scia Engineer. Porovnány byly výsledky prutového výpočtu s výpočtem pomocí plošných konečných prvků. Byla sledována i změna napětí při různé hustotě sítě konečných prvků a srovnali jsme kruhový oblouk s parabolickým na příkladě se stejným rozpětím a vzepětím, kdy lépe vycházel kruhový oblouk.

Oblouky se používají zejména na překlenutí větších rozpětí, kdy je dostatek prostoru pod obloukem. Oblouky využívají klenbový efekt, kdy je nejideálnější situace v případě prostého tlaku bez ohybu. Existuje více typů oblouků než jen 2, kterými se v práci zabýváme. Každý bude vhodnější při jiném zatížení a s jinou geometrií.



## Použitá literatura

- [1] *Základy matematické teorie pružnosti*, Brožovský J. Materna A., <http://mi21.vsb.cz>, 2012
- [2] *Pružnost a plasticita II*, Teplý B., Šmírák S., Brno CERM, 2000
- [3] *FEM - Principy a praxe metody konečných prvků*, Kolář V., Němec I., Kanický V., Praha, Computer Press, 1997
- [4] *Metoda konečných prvků*, 2. přepracované vydání, Kolář Vladimír, Praha SNTL, 1971
- [5] *Metoda konečných prvků ve stavební mechanice*, Brožovský J. Materna A., <http://mi21.vsb.cz>, 2012
- [6] *Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků*, 2. vydání, Kolář V., Kratochvíl J., Leitner F., Ženíšek A, Praha SNTL, 1979